Aufgabe: Zeigen Sie, daß vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters in unserer Galaxis das Weltall unendlich und ewig ist, und daß Bewegungen durchs All aufgrund seiner Ausdehnung nur lichtartig erfolgen können.

Lösung: Es ist unstreitig, daß die Singularität ein bewegtes Bezugssystem darstellt, da sich das All mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. In unserem Universum herrscht für zwei um den Schwarzschildradius $R_S = x_2' - x_1'$ auseinanderliegende räumliche Ereignisse Gleichzeitigkeit, d.h. $t_2' = t_1',$ wenn man die Singularität auf dem Schwarzschildradius ansiedelt. Das dürfen wir, zumal sie ja nicht punktförmig, sondern sphärisch, d.h. flächenhaft ausgebildet ist. Da sämtliche Punkte auf der Kugeloberfläche beim Urknall radial auseinanderfliegen, greifen wir uns einen beliebigen heraus, der genau im Abstand des Ereignishorizonts liegt, wie in Abb. 1 dargestellt.

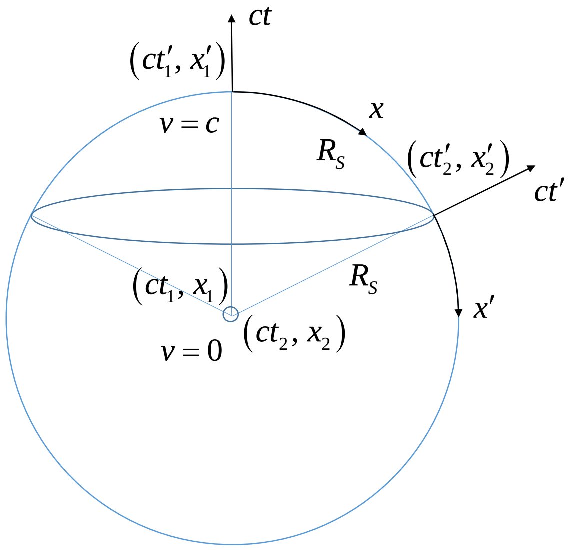

Abbildung 1. Das All bei maximaler Ausdehnung unter der Annahme von Lichtartigkeit

Vom Standpunkt eines ruhenden Beobachters in unserer Galaxis erscheint uns für $\beta \to 1$ die Ausdehnung des Alls wegen

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1' + v\left(t_2' - t_1'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{R_S}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

unendlich und das Weltall ewig:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + \dfrac{v}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{c}\frac{R_S}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Umgekehrt ist im System der Singularität wegen

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

und der daraus abgeleiteten Relation $t_2 - t_1 = \left(v/c^2\right)\left(x_2 - x_1\right)$ der Abstand konstant:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1 - \frac{v^2}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{1-\beta^2}\,(x_2 - x_1) = R_S.$$

Das quadratische Wegelement auf dem Schwarzschildradius des bewegten Bezugssystems lautet daher:

$$\Delta s'^2 = c^2\left(t_2' - t_1'\right)^2 - \left(x_2' - x_1'\right)^2 = -\left(1-\beta^2\right)\left(x_2 - x_1\right)^2 = -R_S^2.$$

Lediglich zum Zeitpunkt des Urknalls für $\beta = 0$ herrscht auch im Ruhesystem Gleichzeitigkeit, während sich die Größe des Schwarzschildradius nicht ändert,

$$x_2 - x_1 = \frac{R_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = R_S \quad \text{bzw.} \quad t_2 - t_1 = \frac{\beta}{c}\frac{R_S}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0.$$

Das quadratische Wegelement ist also unabhängig von β raumartig:

$$\Delta s^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 = \frac{\beta^2 R_S^2}{1-\beta^2} - \frac{R_S^2}{1-\beta^2} = -\frac{R_S^2}{1-\beta^2}\left(1-\beta^2\right) = -R_S^2.$$

Somit lauten die Startbedingungen des Alls: $x_2 - x_1 = x_2' - x_1' = R_S$ und $t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = 0$. Raum und Zeit werden folglich nur scheinbar unendlich, denn in Wirklichkeit ist das nicht der Fall, sondern nur ein relativistischer Effekt, der der Wahl des Bezugssystems geschuldet ist.

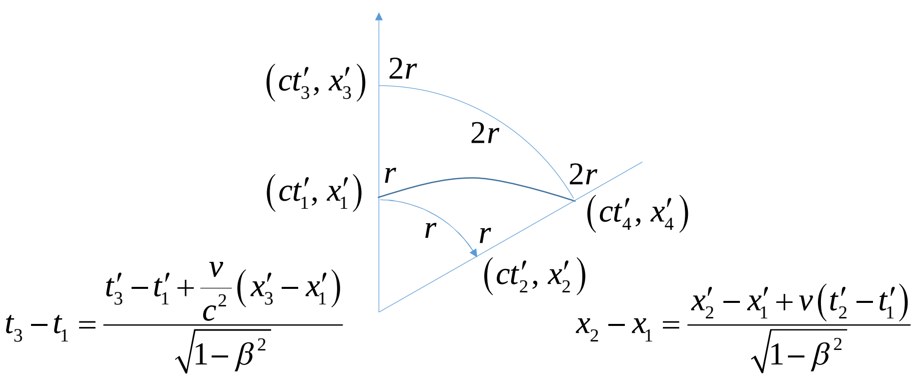

Abbildung 2. Unmöglichkeit raumartiger Bewegungen in einem expandierenden Universum

Nun ist es nach den Gesetzen der Speziellen Relativitätstheorie aber so, daß sich das Universum ausdehnt, während wir durchs All reisen, d.h. wir können den Ort (ct_2', x_2') in Abb. 2 auf direktem Wege gar nicht erreichen, weil er sich, wenn wir dort ankommen würden, gar nicht mehr an dieser Stelle befindet, sondern an einem um die Ausdehnung versetzten Ort $\left(ct'_4,\, x'_4\right)$. Unser Raumfahrzeug wird also nach dem Superpositionsprinzip, das auch in vier Dimensionen gilt, von der Ausdehnung des Raums mitgenommen. Da die Zeit, die wir brauchen, um den Ort $\left(ct'_2,\, x'_2\right)$ zu erreichen, genausolang ist wie die Zeit, in der dieser zum Ort $\left(ct'_4,\, x'_4\right)$ wird, müssen wir gemäß dem Superpositionsprinzip die zeitartige Bewegung von $\left(ct'_1,\, x'_1\right)$ nach $\left(ct'_3,\, x'_3\right)$ hinzuaddieren, wenn wir auch wirklich ankommen wollen. Im Ruhesystem unserer Galaxis gilt also nach dem Satz des Pythagoras

$$\Delta s^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 + c^2\left(t_3 - t_1\right)^2 - \left(x_3 - x_1\right)^2 .$$

Setzen wir in die relativistischen Terme

$$\begin{aligned}
t_2 - t_1 &= \frac{t'_2 - t'_1 + \dfrac{v}{c^2}\left(x'_2 - x'_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_2 - x_1 &= \frac{x'_2 - x'_1 + v\left(t'_2 - t'_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
t_3 - t_1 &= \frac{t'_3 - t'_1 + \dfrac{v}{c^2}\left(x'_3 - x'_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_3 - x_1 &= \frac{x'_3 - x'_1 + v\left(t'_3 - t'_1\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

die in unserem bewegten System gemessenen Beziehungen

$$\begin{aligned}
&c\left(t'_2 - t'_1\right) = 0, \quad x'_2 - x'_1 = r, \\
&c\left(t'_3 - t'_1\right) = r, \quad x'_3 - x'_1 = 0
\end{aligned}$$

ein, vereinfachen sich die obigen Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
t_2 - t_1 &= \frac{\beta r}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_2 - x_1 &= \frac{r}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
t_3 - t_1 &= \frac{r}{c\sqrt{1-\beta^2}}, \quad & x_3 - x_1 &= \frac{\beta r}{\sqrt{1-\beta^2}}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt das quadratische Wegelement eine lichtartige Bewegung:

$$\Delta s^2 = \frac{\beta^2 r^2}{1-\beta^2} - \frac{r^2}{1-\beta^2} + \frac{r^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 r^2}{1-\beta^2} = 0.$$

Das gilt unabhängig vom gewählten Bezugssystem:

$$\Delta s'^2 = c^2\left(t'_2 - t'_1\right)^2 - \left(x'_2 - x'_1\right)^2 + c^2\left(t'_3 - t'_1\right)^2 - \left(x'_3 - x'_1\right)^2 = -r^2 + r^2 = 0,$$

denn der Abstand zweier Ereignisse in einem sich mit der Geschwindigkeit v ausdehnenden Weltall ist wegen

$$\Delta s'^2 = c^2\left(\frac{t_2-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}{}_2 - \frac{t_1-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{x_2-vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1-vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(y_2-y_1\right)^2 - \left(z_2-z_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2\left(t_2-t_1-\frac{v}{c^2}\left(x_2-x_1\right)\right)^2 - \left(x_2-x_1-v\left(t_2-t_1\right)\right)^2\right] - \left(y_2-y_1\right)^2 - \left(z_2-z_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[\left(c^2-v^2\right)\left(t_2-t_1\right)^2 - \left(1-\beta^2\right)\left(x_2-x_1\right)^2\right] - \left(y_2-y_1\right)^2 - \left(z_2-z_1\right)^2$$

$$= c^2\left(t_2-t_1\right)^2 - \left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right] = \Delta s^2$$

unabhängig vom Bezugssystem. Das quadratische Wegelement besitzt demnach eine Zeit- und eine Ortsdarstellung, denn Ort und Zeit sind nicht voneinander unabhängig. In der Ortsdarstellung senkrecht zur Zeitachse lautet das Wegelement

$$\Delta s_\perp^2 = c^2\left(t_2-t_1\right)^2 - \left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\beta^2}v^2\left(t_2-t_1\right)^2 - \left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)\left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\gamma^2-1}\left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right],$$

wobei

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Diese Darstellung hat zwei Spezialfälle. Für $v=0$ ist $\beta=0$ und $\gamma=1,$ jedoch auch $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1,$ also $\Delta s_\perp=0.$ Das bedeutet, daß sich alles, was ruht, am selben Ort und damit automatisch in einer Singularität befindet. Für $v=c$ ist $\beta=1$ und es geht $\gamma\to\infty,$ also gilt ebenfalls

$$\Delta s_\perp^2 = \left[\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2\right]\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{\gamma^2-1} = 0.$$

In der Zeitdarstellung ist

$$\Delta s_\parallel^2 = c^2\left(t_3-t_1\right)^2 - \left[\left(x_3-x_1\right)^2 + \left(y_3-y_1\right)^2 + \left(z_3-z_1\right)^2\right]$$

$$= c^2\left(t_3-t_1\right)^2 - v^2\left(t_3-t_1\right)^2 = \left(1-\beta^2\right)c^2\left(t_3-t_1\right)^2.$$

Auch diese Gleichung kennt zwei Spezialfälle. Für $v=0,$ d.h. in der Singularität, ist $\beta=0,$ jedoch auch $t_3=t_1,$ weil es noch keinen Raum gibt. Also ist $\Delta s_\parallel=0.$ Für $v=c$ ist $\beta=1$ und daher ebenfalls $\Delta s_{\|} = 0.$ Für beliebige Geschwindigkeiten $0 < v < c$ ist $\Delta s_{\|}^2 > 0$ und in radialer Ausbreitungsrichtung zeitartig. Je größer somit der Abstand zweier Ereignisse, desto größer ist, auch wenn dieser optisch statisch erscheint, ihre Relativgeschwindigkeit. Konstante Abstände gibt es im Universum nicht, alles bewegt sich, und sei es auch nur unmerklich.

Was sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hat wegen der Lichtartigkeit keinen Abstand. Die Übertragung der Wirkung erfolgt somit instantan, d.h. unabhängig von der dreidimensionalen Entfernung. Wegen $\Delta s_{\|}^2 = \Delta s_{\perp}^2 = 0$ bzw.

$$\begin{aligned}
&\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2, \\
&\left(x_3 - x_1\right)^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2 + \left(z_3 - z_1\right)^2 = c^2\left(t_3 - t_1\right)^2
\end{aligned}$$

folgt nach Subtraktion beider Gleichungen die Relation

$$\begin{aligned}
x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2 - 2\left(x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 - c^2 t_2 t_1\right) = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \\
-c^2 t_3^2 - 2\left(x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 - c^2 t_3 t_1\right).
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{s}_2^2 = \mathbf{s}_3^2$ und $\left(\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_2\right) \cdot \mathbf{s}_1 = 0,$ folgt $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_2,$ was nur in einer Singularität möglich ist.

Auch für beliebige Geschwindigkeiten $0 < v < c$ bzw. $0 < \beta < 1$ ist das quadratische Wegelement in radialer Ausbreitungsrichtung, d.h. am gleichen Ort, größer null,

$$\Delta s_{\|}^2 = c^2\left(t_3 - t_1\right)^2 - \left[\left(x_3 - x_1\right)^2 + \left(y_3 - y_1\right)^2 + \left(z_3 - z_1\right)^2\right] = \frac{r^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2 r^2}{1-\beta^2} = r^2 > 0,$$

und damit zeitartig. In lateraler Ausbreitungsrichtung gilt wegen der Gleichzeitigkeit

$$\Delta s_{\perp}^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left[\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2\right] = \frac{\beta^2 r^2}{1-\beta^2} - \frac{r^2}{1-\beta^2} = -r^2 < 0,$$

und das quadratische Wegelement ist raumartig. Insgesamt gilt $\Delta s^2 = \Delta s_{\perp}^2 + \Delta s_{\|}^2 = 0.$ Die Welt ist also eine Singularität, und für $r = R_S$ führt der raumartige Weg in der Zeit zurück bis zum Urknall und damit durchs Antiuniversum,

$$\Delta s^2 = \Delta s_{\|}^2 + \Delta s_{\perp}^2 = R_S^2 - R_S^2 = R_S^2 + i^2 R_S^2 = R_S^2 + \overline{R}_S^2 = 0.$$

Einer Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit muß daher eine eindeutige Absage erteilt werden, da es isolierte raumartige Bewegungen nicht gibt. Aufgrund der lichtartigen Expansion des Alls trifft die Relativitätstheorie selbstverständlich auch auf die Beschreibung Schwarzer Löcher zu. Sie erklärt ferner, warum es im All verschränkte Zustände gibt. Die Wellenfunktion liefert daher ein vollständiges Bild vom Universum und seinem Antiuniversum, da sie sich aus Beiträgen beider Universen zusammensetzt.

