

Physikaufgabe 175

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Geben Sie ein Beispiel, warum an der Lokalität festgehalten werden muß.

Lösung: Lokalität bedeutet, daß Signale nur mit höchstens Lichtgeschwindigkeit übertragen werden können. Als Beispiel wählen wir ein Billardspiel mit besonderer Konfiguration, bei dem zwei Ereignisse in Betracht kommen, die in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt sind. Abb. 1 zeigt einen zentralen Stoß auf die zehnte Kugel (Ereignis 1),¹ Abb. 2 einen ebensolchen auf die erste (Ereignis 2). Der räumliche und zeitliche Abstand zwischen beiden Ereignissen kann theoretisch auf beliebig viele Kugeln ausgedehnt werden. Wir wählen der Einfachheit halber Billardkugeln mit 5 cm Durchmesser und 100 g Gewicht.² 10 solcher Kugeln ordnen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf einem Billardtisch von 2,5 m Länge gedanklich so an, daß sie exakt auf einer Linie liegen und einander berühren.³



Abbildung 1. In Bewegung befindet sich nur die weiße, von rechts kommende Kugel

Sobald die weiße Kugel auf die zehnte schwarze Kugel trifft, erfolgt eine Impulsübertragung auf die äußerst linke schwarze Kugel, wobei die weiße Kugel liegenbleibt, während die linke mit demselben Impuls weiterrollt, den die weiße ursprünglich hatte. Alle anderen Kugeln bleiben liegen, wo sie waren, so als ob sie keinen Impuls abbekommen hätten. Für einen Beobachter am Ort des 1. Ereignisses, für den das 2. Ereignis außer Sichtweite liegt, findet scheinbar kein Impulsübertrag von der elften auf die erste Kugel statt. Darin täuscht man sich allerdings, wie man in Abb. 2 sieht, sonst könnte sich die Impulsübertragung nicht bis zur ersten Kugel fortgepflanzt haben. Es handelt sich auch um keine spukhafte Fernwirkung, auch wenn es offensichtlich danach aussieht, als ob nur die beiden Randkugeln miteinander interagieren.



Abbildung 2. In Bewegung zum linken Tischrand hin befindet sich nur die linke schwarze Kugel

Die Wechselwirkung wird nämlich erst dann ausgelöst, wenn sich die erste schwarze Kugel ablöst. Würden alle 11 Kugeln nebeneinander aufgereiht liegenbleiben, so würde dies eine Verletzung des Impulserhaltungssatzes bedeuten, da der Gesamtimpuls anfangs nicht null war, es also auch am Ende nicht sein kann. Der Abstand zwischen der einen und den scheinbar aneinanderhaftenden anderen Kugeln suggeriert, daß sich nur die losgelöste Kugel in Bewegung befindet, d.h. daß nur sie einen Impuls besitzt. Man erkennt ferner, daß sich der Schwerpunkt des

¹ Unsere Zählung erfolgt von links nach rechts.

² Das sind lediglich typische charakteristische Werte, die für die Aufgabenstellung als solche nicht gebraucht werden. Sie sind nützlich, um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie weit die Ereignisse eines elastischen Stoßes auseinanderliegen können.

³ Beim Pool-Billard verwendet man original 16 Kugeln einer Größe von 57,2 mm Durchmesser mit 170 g Gewicht (Masse). Der 9-ft-Tisch hat einer Größe von 2,54 m x 1,27 m.

Physikaufgabe 175

Gesamtsystems aus der einen bewegten und den 10 ruhenden Kugeln mit konstanter Geschwindigkeit von rechts nach links bewegt. Er befindet sich zum Zeitpunkt des Auftreffens der weißen Kugel genau im Zentrum der sechsten schwarzen Kugel.

Heisenberg hat nun herausgefunden, daß es im mikroskopischen Bereich niedriger Quantenzahlen nicht möglich ist, Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig beliebig genau⁴ zu messen. Ein Beobachter kann nur entweder den Ort des Teilchens oder seinen Impuls messen, nicht aber beides. Wie unser Beispiel zeigt, ist das gleichzeitige Messen auch im Makroskopischen nicht möglich. Grund ist, daß wir eine Ortsänderung nur aufgrund einer Bewegung feststellen können, was Messungen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten erfordert. Legen wir nun unser Koordinatensystem in den Mittelpunkt der 6. Kugel, so befindet sich die weiße Kugel zum Zeitpunkt ihres Auftreffens am Ort $x = 5a$, wenn wir mit a den Abstand zwischen zwei sich berührenden Kugeln bezeichnen. Dieser Abstand ist zugleich der Kugeldurchmesser. Zum Zeitpunkt des Auftreffens der weißen Kugel befindet sich die erste schwarze Kugel am Ort $x = -5a$, wobei die x -Achse die Richtung entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung angibt.

Nun könnte man nach Heisenberg zu der Auffassung gelangen, im Moment des Aufpralls seien die Erhaltungssätze verletzt, da sich beide Kugeln nicht bewegen und damit der Gesamtimpuls gleich null sein müßte. Ort und Impuls des Schwerpunkts sind dann ebenfalls beide gleich null, denn

$$x_S = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{1}{11} (-5a - 4a - 3a - 2a - a \pm 0 + a + 2a + 3a + 4a + 5a) = 0$$

und

$$p_S = \sum_{i=1}^{11} p_i = m \sum_{i=1}^{11} v_i = 0.$$

Vor dem elastischen Stoß lag nämlich der Schwerpunkt bei

$$x_S = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{1}{11} (-5a - 4a - 3a - 2a - a + 0 + a + 2a + 3a + 4a + x_{11}) = \frac{1}{11} (-5a + x_{11}) > 0$$

und der Gesamtimpuls bei

$$p_S = \sum_{i=1}^{11} p_i = p_{11} = -mv_{11} < 0.$$

Nach dem elastischen Stoß haben wir einen Schwerpunkt von

$$x_S = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{1}{11} (x_1 - 4a - 3a - 2a - a + 0 + a + 2a + 3a + 4a + 5a) = \frac{1}{11} (x_1 + 5a) < 0$$

⁴ Heisenberg drückte die Wendung „beliebig genau“ durch das Synonym „scharf“ aus.

und einen Impuls

$$p_S = \sum_{i=1}^{11} p_i = p_1 = -mv_1 < 0.$$

Gehen wir nun davon aus, daß der Impuls vor und nach dem Stoß erhalten bleibt, gilt $v_{11} = v_1$, da sich die Kugelmassen nicht ändern. Das Weg-Zeit-Gesetz der Schwerpunktbewegung lautet

$$x_S = \begin{cases} (x_{11} - 5a)/11 = (x_0 - vt - 5a)/11 & \text{für } t \in [0, t_0], \\ 0 & \text{für } t = t_0, \\ (x_1 + 5a)/11 = -v(t - t_0)/11 & \text{für } t \in [t_0, 2t_0], \end{cases}$$

wobei $t_0 = (x_0 - 5a)/v$. Die Bewegung des Schwerpunkts verläuft also stetig und ohne Sprünge. Das ist nicht der Fall für die Kugeln 1 und 11. Betrachten wir die Kugeln nun als Teilchen einer Austauschwechselwirkung, so ergibt sich für den Impuls der bewegten Kugel eine Sprungfunktion

$$\left. \begin{matrix} x_{11} \\ x_1 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} x_0 - vt & \text{für } t \in [0, t_0[, \\ \pm 5a & \text{für } t = t_0, \\ -5a - v(t - t_0) & \text{für } t \in]t_0, 2t_0], \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = (x_0 - 5a)/v$ wird also der Ort der bewegten Kugel um $10a$ nach links versetzt, d.h. um die gesamte Länge sämtlicher aufgereihten Kugeln. Das gleiche würde auch gelten, wenn wir beliebig viele Kugeln aneinanderreihen würden. Begrenzendes Element ist lediglich die verfügbare Tischlänge. Wir haben damit gezeigt, daß sich eine Wirkung über eine beliebige Distanz fortpflanzen kann, ohne daß dazwischen eine sichtbare Bewegung stattgefunden haben muß, und diese Ausbreitung erfolgt instantan, da zwischen je zwei Kugeln ja kein realer Abstand vorhanden ist.⁵ Ersetzen wir hingegen die Kugeln gedanklich durch Photonen, die keine Ruhemasse haben, sondern lediglich einen Impuls, dann entfällt auch der Einwand der Trägheit der Masse.⁶ Es gibt also keinen Grund, warum eine Wellenfunktion sich schneller ausbreiten sollte als mit Lichtgeschwindigkeit, da wir ja von noch keinem, der weiter entfernt war, als das Licht in einer gegebenen Zeit zurücklegen kann, ein instantanes Meßergebnis geliefert bekamen. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens kann man sicher über den Bereich, den das Licht zurücklegt, hinaus berechnen. Das hilft nur nichts, wenn sich das zu übertragende Signal, in unserem Fall der Impuls, noch nicht bis dorthin ausgebreitet hat und damit die Erhaltungssätze oder die Kausalität verletzt wären.

⁵ Natürlich kann man jetzt einwenden, daß sich jede der Kugeln elastisch verformt, ehe das dritte Newtonsche Gesetz *actio = reactio* den Impuls weitergereicht hat. Nach Newton hingegen erfolgen beide Aktionen gleichzeitig, also ohne Zeitverzögerung.

⁶ Wir betrachten das Vakuum als ein mit Licht gefülltes Kontinuum, in welchem sich die Photonen dicht gepackt ohne gegenseitigen Abstand aufhalten.

Physikaufgabe 175

Die Heisenbergsche Feststellung, daß Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig gemessen werden können, ist im Grunde eine Trivialität, wenn man bedenkt, daß eine Messung auch aufgrund einer, wie für dieses Experiment typischen Beobachtung erfolgen kann. Betrachten wir nun das soeben beschriebene Experiment als ein System aus zwei wechselwirkenden Teilchen, denen wir die Orte x_1 und x_{11} mit den entsprechenden Impulsen p_1 und p_{11} zuschreiben, dann sind letztere wegen $v_{11} = v_1$ gleich, d.h. $p_{11} = -mv = p_1$.

Der Impuls des Gesamtsystems bleibt somit erhalten,

$$p_S^{\text{vorher}} = p_{11} = -mv = p_1 = p_S^{\text{nachher}},$$

bzw. es findet keine Impulsänderung statt:

$$\Delta p_S = p_S^{\text{nachher}} - p_S^{\text{vorher}} = p_1 - p_{11} = -mv + mv = 0.$$

Auch eine Ortsänderung hat nicht stattgefunden, wie aus den Schwerpunktpositionen hervorgeht. Es ist nämlich

$$x_S^{\text{vorher}} = \frac{1}{11}(-5a + x_{11}) \quad \text{und} \quad x_S^{\text{nachher}} = \frac{1}{11}(x_1 + 5a),$$

also

$$\Delta x_S = x_S^{\text{nachher}} - x_S^{\text{vorher}} = \frac{1}{11}(x_1 - x_{11} + 10a) = \frac{1}{11}(-10a + 10a) = 0,$$

womit der Schwerpunkt erhalten bleibt. Lediglich der Beobachter sieht einen festen Abstand zwischen den nichtunterscheidbaren Teilchen, den er mit $\Delta x = x_{11} - x_1 = 10a$ angibt, und zwar aufgrund einer gleichzeitigen Messung, während sich die Impulse für ihn überhaupt nicht zu ändern scheinen: $\Delta p = p_{11} - p_1 = 0$. Da die Ortsdifferenz nicht null wird, schloß Heisenberg, daß Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig scharf gemessen werden können. Das nimmt nicht wunder, da der Zustand des jeweils anderen Teilchens bekannt ist, wenn eines davon gemessen wird. Führen wir die Messung durch, sehen wir Kugel 11 am Ort $5a$. Damit kollabiert die Wellenfunktion, weil ihr Ort mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 angegeben werden kann und wir daraus auf den Ort der anderen Kugel schließen können sowie auf deren Impuls. Wir können den Impuls allerdings nur dann quantitativ fassen, wenn wir das Zeitintervall messen, welches zwischen dem Auftreffen der weißen und dem Davonfliegen der schwarzen Kugel liegt. Der Impuls der letzteren ist dann gegeben durch

$$p_1 = m \frac{x_1 - x_{11}}{t_1 - t_{11}} = -m \frac{10a}{t_1 - t_{11}}.$$

Eine gleichzeitige Messung $t_1 = t_{11}$ würde bedeuten, daß $p_1 \rightarrow -\infty$ geht, was Heisenberg zu der Aussage verleitet, Ort und Impuls ein und desselben Teilchens könnten nicht gleichzeitig scharf gemessen werden. Dabei ist das nur eine Frage der Meßgenauigkeit. Angenommen, wir

Physikaufgabe 175

würden zwei Uhren miteinander synchronisieren und an den Orten x_1 und x_{11} aufstellen. Der Beobachter möge Geräusche anstatt mit Schallgeschwindigkeit⁷ mit Lichtgeschwindigkeit empfangen. Er ist dann in der Lage, die geringe Zeitdifferenz $t_1 - t_{11}$ präzise zu messen. Aufgrund der Impulserhaltung $p_1 = p_{11} = -mv$ kann man aus der gemessenen Zeitdifferenz die Geschwindigkeit bestimmen, $v = 10a/(t_1 - t_{11})$, und bei Kenntnis der Masse den Impuls. Die Lokalität, daß sich nämlich nichts schneller bewegen kann als das Licht, ist damit validiert, denn auch die Wellenmechanik hat die Erhaltungssätze zu respektieren.

Wir haben für diesen Beweis zwei verschränkte Teilchen verwendet, die ihre Information nur deswegen weitergeben konnten, weil sie in der Vergangenheit in Wechselwirkung miteinander getreten waren, wie hier z.B. in Form eines elastischen Stoßes. Es kann also tatsächlich nachgewiesen werden, daß es verborgene Variablen im Sinne des EPR-Paradoxons gibt [1], und zwar in diesem Experiment den Impuls, dessen Übertragung bei großen Abständen von außen nicht zu sehen ist, der aber gemäß den Naturgesetzen vorhanden sein muß, auch wenn wir nur die Ortsvariable erfassen konnten. Erstaunlicherweise taucht der Impuls am anderen Ende erst dann auf, wenn eine der beiden Variablen gemessen wurde, in unserem Falle war es der Ort. Ohne verschränkte Zustände, d.h. ohne eine Wechselwirkung zwischen den Teilchen, wäre uns dieser Beweis wohl nicht gelungen.

Literatur

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. 47 (1935), S. 777–780.

⁷ Wir können das Geräusch, welches der zentrale Stoß verursacht, direkt hören.