Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe der Dirac-Gleichung, daß die Gravitation eine Austauschwechselwirkung ist. Wie ändert sich dadurch die Energie-Impuls-Relation?

Lösung: Formen wir die Energie-Impuls-Beziehung der relativistischen Physik in eine Eigenwertgleichung um,

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = (E + pc)(E - pc),$$

können wir diese quantenmechanisch auch als Operatorgleichung ansetzen:

$$(\hat{E} + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\hat{E} - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}) = m^2c^4.$$

Mit den Eigenvektoren $\psi_A(\mathbf{x})$ und $\psi_B(\mathbf{x})$ ergibt sich nur ein einziger Eigenwert, die Ruheenergie mc^2,

$$\begin{aligned}(E + \mathbf{c} \cdot \mathbf{p})\psi_A(\mathbf{x}) &= mc^2\psi_A(\mathbf{x}),\\ (E - \mathbf{c} \cdot \mathbf{p})\psi_B(\mathbf{x}) &= mc^2\psi_B(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Seien $|\psi_A(\mathbf{x})\rangle$ und $|\psi_B(\mathbf{x})\rangle$ Eigenzustände des Energieoperators $\hat{E}$ und des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\hat{E}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle &= mc^2|\psi_A(\mathbf{x})\rangle - \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle,\\ \hat{E}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle &= mc^2|\psi_B(\mathbf{x})\rangle + \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle.\end{aligned}$$

Mit den Identitäten der Dirac-Gleichung

$$\psi_A(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\psi_A(\mathbf{x}), \quad \psi_B(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\psi_B(\mathbf{x})$$

können die Operatorgleichungen einheitlicher geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\hat{E}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle &= mc^2|\psi_A(\mathbf{x})\rangle + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle,\\ \hat{E}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle &= mc^2|\psi_B(\mathbf{x})\rangle + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle.\end{aligned}$$

Insbesondere zeigt sich, daß die beiden Erwartungswerte ein identisches Bild ergeben,

$$\begin{aligned}E = \langle E \rangle &= \frac{\langle \psi_A(\mathbf{x})|\hat{E}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle}{\langle \psi_A(\mathbf{x})|\psi_A(\mathbf{x})\rangle} = mc^2 + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\frac{\langle \psi_A(\mathbf{x})|\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_A(\mathbf{x})\rangle}{\langle \psi_A(\mathbf{x})|\psi_A(\mathbf{x})\rangle},\\ E = \langle E \rangle &= \frac{\langle \psi_B(\mathbf{x})|\hat{E}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle}{\langle \psi_B(\mathbf{x})|\psi_B(\mathbf{x})\rangle} = mc^2 + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}}{E - mc^2}\frac{\langle \psi_B(\mathbf{x})|\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}|\psi_B(\mathbf{x})\rangle}{\langle \psi_B(\mathbf{x})|\psi_B(\mathbf{x})\rangle}.\end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem ursprünglichen Ansatz zeigt, daß die Ausdrücke

$$\frac{\left\langle \psi_A(\mathbf{x}) \middle| \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \psi_A(\mathbf{x}) \right\rangle}{\left\langle \psi_A(\mathbf{x}) \middle| \psi_A(\mathbf{x}) \right\rangle} = -\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}, \quad \frac{\left\langle \psi_B(\mathbf{x}) \middle| \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \psi_B(\mathbf{x}) \right\rangle}{\left\langle \psi_B(\mathbf{x}) \middle| \psi_B(\mathbf{x}) \right\rangle} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}$$

die Energie-Impuls-Relation erfüllen. Multiplizieren wir nun die erste Gleichung mit $\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle$ und die zweite mit $\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle$, wobei es auf die Reihenfolge ankommt, erhalten wir den Formalismus zweier miteinander wechselwirkender Teilchen,

$$\hat{E}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle,$$
$$\hat{E}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle + \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle.$$

Mit der symmetrischen Wellenfunktion für Bosonen, zu denen auch das Graviton gehört,

$$\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)+\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_A(\mathbf{x}_1)\psi_B(\mathbf{x}_2)+\psi_B(\mathbf{x}_1)\psi_A(\mathbf{x}_2)\right),$$

folgen daraus die Operatorgleichungen der gravitativen Austauschwechselwirkung,

$$\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle = mc^2\left|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle,$$
$$\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle = mc^2\left|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle.$$

Durch entsprechende Multiplikation mit den jeweiligen Bra-Vektoren ergeben sich aufgrund der Gravitonen-Verschränkung zwei direkte und zwei Austauschterme,

$$D_{12} = \left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right|\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle = mc^2\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle,$$
$$D_{21} = \left\langle\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right|\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle = mc^2\left\langle\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\middle|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle,$$
$$A_{12} = \left\langle\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right|\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle = mc^2\left\langle\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle,$$
$$A_{21} = \left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right|\left(\hat{E}-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)\left|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle = mc^2\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\Psi(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)\right\rangle.$$

Streng genommen müssen die Erwartungswerte noch normiert werden,

$$D_{12} = \bar{D}_{21} = \frac{\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\hat{E}\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle}{\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\frac{\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle}{\left\langle\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\middle|\Psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\right\rangle} = mc^2,$$

$$A_{12} = \overline{A}_{21} = \frac{\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \hat{E} \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle}{\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2} \frac{\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle}{\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle} = mc^2,$$

aber das tun wir aus gutem Grunde erst zum Schluß. Den nicht normierten Erwartungswert können wir daher wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
\left\langle E - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\mathbf{p} \right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\left\langle \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\left\langle \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Die Produktregel kann in diesem Fall nicht angewandt werden, da der Operator trotz Ununterscheidbarkeit immer nur auf die Koordinaten eines Teilchens wirkt. Also kann der Eigenwert stets vor das Skalarprodukt gezogen werden. Nach Einsetzen der Produktwellenfunktion folgen unter Verwendung der Einteilchenwellenfunktionen die direkten und die Austauschterme,

$$\begin{aligned}
D_{12} &= \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_1) \middle| \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_1) \right\rangle \middle| \psi_B(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&= mc^2 \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_2) \right\rangle, \\
D_{21} &= \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_1) \middle| \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_1) \right\rangle \middle| \psi_A(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&= mc^2 \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_2) \right\rangle, \\
A_{12} &= \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_1) \middle| \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_1) \right\rangle \middle| \psi_B(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&= mc^2 \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_2) \right\rangle \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_1) \right\rangle, \\
A_{21} &= \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_1) \middle| \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_2) \middle| \left(\hat{E} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}} \right) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_1) \right\rangle \middle| \psi_A(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\
&= mc^2 \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_2) \right\rangle,
\end{aligned}$$

die zusammen den Erwartungswert ergeben,

$$\begin{aligned}
&\left\langle E - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\mathbf{p} \right\rangle = \frac{1}{2} mc^2 \left(\left|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right|^2 \left|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right|^2 + \left|\psi_B(\mathbf{x}_1)\right|^2 \left|\psi_A(\mathbf{x}_2)\right|^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} mc^2 \left(\left\langle \psi_B(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_2) \right\rangle \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_1) \right\rangle + \left\langle \psi_B(\mathbf{x}_2) \middle| \psi_B(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle \psi_A(\mathbf{x}_1) \middle| \psi_A(\mathbf{x}_2) \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

Mit der Normierung $\left|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right|^2 = \left|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right|^2 = \left|\psi_A(\mathbf{x}_2)\right|^2 = \left|\psi_B(\mathbf{x}_1)\right|^2 = 1$ und der komplexen Konjugation ergibt sich schließlich ein reeller Ausdruck:

$$\left\langle E - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\right\rangle = mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\left\langle\psi_B(\mathbf{x}_1)\middle|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right\rangle\left\langle\psi_A(\mathbf{x}_2)\middle|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}mc^2\overline{\left\langle\psi_B(\mathbf{x}_1)\middle|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right\rangle}\cdot\overline{\left\langle\psi_A(\mathbf{x}_2)\middle|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right\rangle}.$$

Wir müssen daher nur den Austauschterm

$$\begin{aligned}A_{12} &= mc^2\left\langle\psi_B(\mathbf{x}_1)\middle|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right\rangle\left\langle\psi_A(\mathbf{x}_2)\middle|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right\rangle\\ &= mc^2\int\overline{\psi}_B(\mathbf{x}_1)\psi_A(\mathbf{x}_1)\,d^4x_1\int\overline{\psi}_A(\mathbf{x}_2)\psi_B(\mathbf{x}_2)\,d^4x_2\\ &= mc^2\int\overline{\phi}_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_1)\,d^4p_1\int\overline{\phi}_A(\mathbf{p}_2)\phi_B(\mathbf{p}_2)\,d^4p_2\end{aligned}$$

berechnen, da sich A_{21} durch komplexe Konjugation ergibt: $A_{21} = \overline{A}_{12}$. Wenn wir für $\phi_A(\mathbf{p})$ und $\phi_B(\mathbf{p})$ ebene Wellen der Form

$$\begin{aligned}\phi_A(\mathbf{p}) &= \psi_A(\mathbf{x}_1)\,e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{r}_1 - Et_1)/\hbar},\\ \phi_B(\mathbf{p}) &= \psi_B(\mathbf{x}_2)\,e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{r}_2 - Et_2)/\hbar},\end{aligned}$$

ansetzen, d.h.

$$\begin{aligned}\phi_A(\mathbf{p}_1) &= \psi_A(\mathbf{x}_1)\,e^{-i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 - Et_1)/\hbar}, \quad \overline{\phi}_A(\mathbf{p}_1) = \overline{\psi}_A(\mathbf{x}_1)\,e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1 - Et_1)/\hbar},\\ \phi_A(\mathbf{p}_2) &= \psi_A(\mathbf{x}_1)\,e^{-i(\mathbf{p}_2\mathbf{r}_1 - Et_1)/\hbar}, \quad \overline{\phi}_A(\mathbf{p}_2) = \overline{\psi}_A(\mathbf{x}_1)\,e^{i(\mathbf{p}_2\mathbf{r}_1 - Et_1)/\hbar}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\phi_B(\mathbf{p}_1) &= \psi_B(\mathbf{x}_2)\,e^{-i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_2 - Et_2)/\hbar}, \quad \overline{\phi}_B(\mathbf{p}_1) = \overline{\psi}_B(\mathbf{x}_2)\,e^{i(\mathbf{p}_1\mathbf{r}_2 - Et_2)/\hbar},\\ \phi_B(\mathbf{p}_2) &= \psi_B(\mathbf{x}_2)\,e^{-i(\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2 - Et_2)/\hbar}, \quad \overline{\phi}_B(\mathbf{p}_2) = \overline{\psi}_B(\mathbf{x}_2)\,e^{i(\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2 - Et_2)/\hbar},\end{aligned}$$

so folgt mit der Normierung $1/p^8$ wegen der jeweils vier Dimensionen das Ergebnis

$$\begin{aligned}A_{12} &= \frac{mc^2}{p^8}\left|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right|^2\left|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right|^2\int d^4p_1 e^{i(\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-E(t_2-t_1))/\hbar}\int d^4p_2 e^{i(\mathbf{p}_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)-E(t_2-t_1))/\hbar}\\ &= \frac{mc^2}{p^6}\left|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right|^2\left|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right|^2\int d^3p_1 e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/\hbar}\int d^3p_2 e^{i\mathbf{p}_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/\hbar},\end{aligned}$$

das sich aufgrund der Normierung $\left|\psi_A(\mathbf{x}_1)\right|^2 = \left|\psi_B(\mathbf{x}_2)\right|^2 = 1$ und unter der Annahme von Lichtartigkeit, d.h. $t_1 = t_2$, und linearer Ausbreitung des Lichts wie folgt weiter vereinfachen läßt,

$$A_{12} = \frac{mc^2}{p^6}\int d^3p_1 e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/\hbar}\int d^3p_2 e^{i\mathbf{p}_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)/\hbar} = \frac{mc^2}{p^2}\int dp_1 e^{ip_1|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|/\hbar}\int dp_2 e^{ip_2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|/\hbar}$$
$$= \frac{mc^2}{p^2}\frac{\hbar^2}{i^2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}e^{i(p_1+p_2)|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|/\hbar} = -\frac{mc^2}{k^2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}.$$

Dabei haben wir von der Impulserhaltung des Alls Gebrauch gemacht, $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2=0.$ Wenn wir die Lichtgeschwindigkeit $c=\omega R_S$ durch den Schwarzschildradius eines nicht rotierenden Schwarzen Lochs ausdrücken,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse des Universums ist, folgt für den normierten Erwartungswert unter Verwendung dieser Näherung das ungefähre Ergebnis des Austauschterms für weit voneinander entfernte Massen, die bis zum Urknall zurückreichen können,

$$A_{12} = -\frac{mc^2}{k^2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2} = -\frac{mc^4}{\omega^2|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2} = -\frac{2GmM}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}\frac{2GM}{\omega^2 R_S^2} \approx -\frac{2GmM}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}R_S.$$

Darin streckt auch die Überlegung, daß das All bei Erreichen der Lichtgeschwindigkeit seinen mechanischen Drehimpuls aufgebraucht hat.

Unser endgültiges Resultat ergibt also den einfachen Ausdruck

$$\left\langle E - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\right\rangle = mc^2 + mc^2\langle\psi_B(\mathbf{x}_1)|\psi_B(\mathbf{x}_2)\rangle\langle\psi_A(\mathbf{x}_2)|\psi_A(\mathbf{x}_1)\rangle$$
$$= mc^2 - \frac{2GmM}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}R_S,$$

in dem man unschwer das Produkt aus relativistischer Gravitationskraft und Schwarzschildradius erkennt. Wir müssen bloß noch den Erwartungswert des Impulsoperators einsetzen,

$$\langle E\rangle = mc^2 - \frac{2GmM}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}R_S - \langle\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\rangle = mc^2 - \frac{2GmM}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2}R_S + \mathbf{p}\cdot\mathbf{c}.$$

Für $|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1| = R_S$ ist

$$\langle E\rangle = E = mc^2 - \frac{2GmM}{R_S} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{c},$$

was auch sinnvoll ist, da das All bei kompletter Durchmessung nur noch kinetische Energie besitzt. Die Ruheenergie wird in diesem Fall von der Austauschwechselwirkung komplett aufgezehrt. Unmittelbar nach der Entstehung des Alls, wenn dieses noch keine Radialgeschwindigkeit aufgenommen hat, gilt hingegen die Lösung für ein maximal rotierendes Schwarzes Loch,

$$E - mc^2 = -\frac{GmM}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|}.$$

Damit ist die Austauschwechselwirkung bis auf das Vorzeichen gleich der kinetischen Energie, die das All vor dem Urknall besaß, also gleich der potentiellen Energie, die daher ein negatives Vorzeichen aufweisen muß und in der Singularität quasi unendlich wird. In dieser gilt bis auf die quantenmechanische Unschärfe $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$, und das erzeugt die Kraft, die das Weltall nach Art einer Zentrifuge mehr oder minder schlagartig expandieren läßt.

Da in unserem Universum die Energie positiv sein muß, d.h.

$$E = mc^2\left(1 - \frac{R_S}{\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|}\right) \geq 0,$$

bedeutet dies aufgrund von $\left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right| \geq R_S$, daß die Austauschwechselwirkung nur zwischen Massen beobachtet werden kann, deren Abstand größer oder gleich dem Schwarzschildradius ist. Keine Masse hat daher in unserem Universum irgendein Pendant. Das erhellt auch daraus, daß man quantenmechanische Monopole nicht isoliert messen oder nachweisen kann. Das Graviton ist somit einer Messung nur während des Urknalls zugänglich, zumal uns das Antiuniversum seinen Zugang gänzlich verwehrt. Was lediglich zu verspüren ist, ist die anziehende Wirkung zweier Massen, die wir irrtümlich einem Austauschteilchen zuschreiben, von dem wir glauben, daß es sich in unserem Universum befinden muß. Da jede Masse ihr Spiegelbild aber im Antiuniversum besitzt, ziehen beide Massen lediglich ihr Spiegelbild an, was verständlicherweise den falschen Schluß nährt, Massen würden sich gegenseitig anziehen. Aber das ist mit großer Wahrscheinlichkeit ein Irrtum. Man wird die Gravitationswechselwirkung anders als bei Ladungen wahrscheinlich niemals experimentell direkt nachweisen können und muß sich daher mit theoretischen Modellen begnügen.[1]

[1] Das liefert Stoff für Science-fiction-Filme. Rüsten wir einen Raumfahrer mit einer geeigneten Meßapparatur aus und lassen ihn die Zeitschranke des Urknalls passieren. Wenn er dann in einer Zeitschleife in sein altes Universum zurückkehrt, werden alle Wissenschaftler dieser Welt von seinen Ergebnissen begeistert sein.

