Aufgabe: Lösen Sie die Dirac-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik für eine entfernte Galaxie der Masse *m* und berechnen Sie die Energie-Erwartungswerte. Zeigen Sie, daß die Lichtgeschwindigkeit ein Vierervektor ist.

Lösung: Multipliziert man die Dirac-Gleichung mit der Dirac-Matrix γ^0 und löst nach dem Energie-Operator auf, folgt die Schrödinger-Form der Dirac-Gleichung,

$$i\hbar\gamma^0\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x})=\left[-i\hbar\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}+mc\gamma^0\right]\psi(\mathbf{x}).$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung die Dirac-Matrizen durch Pauli-Matrizen

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

und definieren die Matrixprodukte wie folgt:

$$\alpha^0=\gamma^0\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&\sigma_0\end{pmatrix},$$

$$\alpha^1=\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\sigma_1\\\sigma_1&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha^2=\gamma^0\gamma^2=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\sigma_2\\\sigma_2&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha^3=\gamma^0\gamma^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\sigma_3\\\sigma_3&0\end{pmatrix},$$

so nimmt die Dirac-Gleichung folgende Gestalt an:

$$i\hbar\alpha^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x})=\left[-i\hbar\alpha^1\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\alpha^2\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\alpha^3\frac{\partial}{\partial z}+mc\gamma^0\right]\psi(\mathbf{x})=\hat{H}\psi(\mathbf{x}),$$

wobei

$$\hat{H} = -i\hbar\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar\alpha^2 \frac{\partial}{\partial y} - i\hbar\alpha^3 \frac{\partial}{\partial z} + mc\gamma^0$$

dem Hamiltonoperator der Schrödingergleichung entspricht. Setzen wir die neuen Matrizen

$$\alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

in die Dirac-Gleichung ein, können wir diese schreiben als

$$i\hbar \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial t} = \left[-i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \right.$$
$$\left. - i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + mc \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \right] \psi(\mathbf{x}),$$

wobei der Hamiltonoperator dann folgende Gestalt annimmt:

$$\hat{H} = -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} - i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + mc \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Fassen wir die Impulsoperatoren in einer Summe zusammen, ergibt sich für die Dirac-Gleichung folgender einfache Ausdruck:

$$i\hbar\alpha^0 \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{c\partial t} = \hat{H}\psi(\mathbf{x}) = \left[\sum_{k=1}^{3} \alpha^k \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + mc\gamma^0 \right] \psi(\mathbf{x}).$$

Da der Hamiltonoperator eher stört als nützt und wir ihn für das Weitere nicht mehr benötigen, formen wir wie folgt um:

$$\left[\alpha^0 i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + \sum_{k=1}^{3} \alpha^k \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \psi(\mathbf{x}) = \left[\sum_{k=0}^{3} \alpha^k \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \psi(\mathbf{x}) = mc\gamma^0 \psi(\mathbf{x}).$$

Wenn wir nun die Dirac-Gleichung in eine Energiegleichung umwandeln wollen, müssen wir den ganzen Ausdruck mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizieren,

$$\left[\alpha^0 ci\hbar \frac{\partial}{\partial ct} + \sum_{k=1}^{3} \alpha^k c \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \psi(\mathbf{x}) = \left[\sum_{k=0}^{3} \alpha^k c \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right] \psi(\mathbf{x}) = mc^2\gamma^0 \psi(\mathbf{x}).$$

Mittels

$$\gamma^0 c = \begin{pmatrix} \sigma_0 c & 0 \\ 0 & -\sigma_0 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad c^0 = \alpha^0 c = \begin{pmatrix} \sigma_0 c & 0 \\ 0 & \sigma_0 c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

und

$$c^k = \alpha^k c = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k c \\ \sigma_k c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_k \\ c_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \{1, 2, 3\},$$

setzen wir nun in der Dirac-Gleichung die Lichtgeschwindigkeit vektoriell an. Damit ergibt sich die folgende Notation:

$$\left[c^0 c^{-1} \hat{E} - \sum_{k=1}^{3} c^k \hat{p}_k \right] \psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{3} c^k \hat{p}_k \psi(\mathbf{x}) = mc^2 \gamma^0 \psi(\mathbf{x})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \hat{E} & -\left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right) \\ -\left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right) & \hat{E} \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x}).$$

Multiplizieren wir die zweite Zeile mit $-1,$ ändert sich der Wert der Determinante nicht,

$$\begin{pmatrix} \hat{E} & -\left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right) \\ c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z & -\hat{E} \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & mc^2 \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x}),$$

und wir können kompakter schreiben:

$$\begin{pmatrix} \hat{E} - mc^2 & -\left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right) \\ c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z & -\hat{E} - mc^2 \end{pmatrix} \psi(\mathbf{x}) = 0.$$

Diese Matrixgleichung läßt sich mit der zweiwertigen Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_A(\mathbf{x}) \\ \psi_B(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

in Komponentenschreibweise angeben, i.e.

$$\begin{aligned} &\hat{E}\psi_A(\mathbf{x}) - \left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right)\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2 \psi_A(\mathbf{x}), \\ &\left(c_1 \hat{p}_x + c_2 \hat{p}_y + c_z \hat{p}_z\right)\psi_A(\mathbf{x}) - \hat{E}\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2 \psi_B(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Setzen wir in dieses gekoppelte Gleichungssystem die Operatoren für Energie und Impuls ein,

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla,$$

erhalten wir ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_A(\mathbf{x})+i\hbar\mathbf{c}\cdot\nabla\psi_B(\mathbf{x})=mc^2\psi_A(\mathbf{x}),$$
$$-i\hbar\mathbf{c}\cdot\nabla\psi_A(\mathbf{x})-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B(\mathbf{x})=mc^2\psi_B(\mathbf{x}),$$

das einem expandierenden und einem kontrahierenden Universum entspricht und umgekehrt. Wie wir später sehen werden, hat die Wellenfunktion des Antiuniversums $\psi_B(\mathbf{x})$ das umgekehrte Vorzeichen der Wellenfunktion des Universums $\psi_A(\mathbf{x})$. Es dürfte klar sein, daß die Lösungen nur hin- und rücklaufende Wellen sein können,

$$\psi_A(\mathbf{x})=\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$
$$\psi_B(\mathbf{x})=\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$

womit wir folgende Eigenwertgleichungen erhalten:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}+i\hbar\mathbf{c}\cdot\nabla\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=mc^2\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$
$$-i\hbar\mathbf{c}\cdot\nabla\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=mc^2\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}.$$

Nach Differentiation und Substitution mit den Zeitableitungen

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_A(\mathbf{x})=i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\right)\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=E\psi_A(\mathbf{x}),$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B(\mathbf{x})=i\hbar\left(i\frac{E}{\hbar}\right)\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=-E\psi_B(\mathbf{x})$$

und den Gradienten

$$\nabla\psi_A(\mathbf{x})=\phi_A(\mathbf{p})\nabla e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=\phi_A(\mathbf{p})\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\psi_A(\mathbf{x}),$$
$$\nabla\psi_B(\mathbf{x})=\phi_B(\mathbf{p})\nabla e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=\phi_B(\mathbf{p})\left(-\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\right)e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=\left(-\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\right)\psi_B(\mathbf{x})$$

erhalten wir das folgende Zwischenergebnis:

$$i\hbar\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}+i\hbar\mathbf{c}\cdot\left(-i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\right)\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=mc^2\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$
$$-i\hbar\mathbf{c}\cdot\left(i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\right)\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}-i\hbar\left(\frac{iE}{\hbar}\right)\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}=mc^2\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$

so daß nach Kürzung des Planckschen Wirkungsquantums und Eliminierung der imaginären Einheit der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&E\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} = mc^2\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},\\
&\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\phi_A(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} + E\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} = mc^2\phi_B(\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}
\end{aligned}
$$

verbleibt. Nach Einsetzen der Wellenfunktionen nehmen obige Gleichungen folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
&E\psi_A(\mathbf{x}) + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_A(\mathbf{x}),\\
&\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\psi_A(\mathbf{x}) + E\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_B(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

Lösen wir die zweite Gleichung nach $\psi_B(\mathbf{x})$ auf,

$$
\psi_B(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\psi_A(\mathbf{x}),
$$

und setzen diese in die erste Gleichung ein, ergibt sich der Ausdruck

$$
E\psi_A(\mathbf{x}) = mc^2\psi_A(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_A(\mathbf{x}) + \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E-mc^2}\psi_A(\mathbf{x}),
$$

den wir in

$$
\left(E-mc^2\right)^2\psi_A(\mathbf{x}) = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2\psi_A(\mathbf{x})
$$

umformen können. Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel, ergeben sich die beiden Lösungen

$$
E = mc^2 \pm \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}.
$$

Multiplizieren wir diese miteinander, erhalten wir ein Ergebnis, das der Energie-Impuls-Beziehung schon recht nahekommt, und zwar

$$
E^2 = \left(mc^2 + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\right)\left(mc^2 - \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\right) = m^2c^4 + (\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2.
$$

Mit den Matrizen

$$
c^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} c
$$

folgt für das Betragsquadrat der bereits bekannte Ausdruck

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2 &= \left(c^1p_1 + c^2p_2 + c^3p_3\right)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} p_1c + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} p_2c + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} p_3c\right]^2\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \left(\sigma_1p_1 + \sigma_2p_2 + \sigma_3p_3\right)^2 c^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\sigma_1^2p_1^2 + \sigma_2^2p_2^2 + \sigma_3^2p_3^2\right)c^2\\
&= \sigma_0^2\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)c^2 = \sigma_0\mathbf{p}^2c^2.
\end{aligned}
$$

Da wir die Einheitsmatrix kürzen können, folgt schließlich die Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2.$$

Mit der zweiten Lösung verfahren wir analog. Von den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}&E\psi_A(\mathbf{x}) + \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\,\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_A(\mathbf{x}),\\&\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\,\psi_A(\mathbf{x}) + E\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_B(\mathbf{x})\end{aligned}$$

lösen wir die erste nach $\psi_A(\mathbf{x})$ auf,

$$\psi_A(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E - mc^2}\psi_B(\mathbf{x}),$$

und setzen diese in die zweite Gleichung ein. Somit ergibt sich die zweite Eigenwertgleichung

$$E\psi_B(\mathbf{x}) = mc^2\psi_B(\mathbf{x}) - \mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\,\psi_A(\mathbf{x}) = mc^2\psi_B(\mathbf{x}) + \frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E - mc^2}\psi_B(\mathbf{x}).$$

Wir wollen nun noch aus den Operatorgleichungen die Erwartungswerte bestimmen,

$$\begin{aligned}&\hat{E}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle + \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle,\\&-\hat{E}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle - \mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle,\end{aligned}$$

und bilden dazu die Skalarprodukte

$$\begin{aligned}&\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|\hat{E}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle + \left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle,\\&\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\left(-\hat{E}\right)\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle = mc^2\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle - \left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle.\end{aligned}$$

Die beiden Erwartungswerte sind definiert durch

$$\begin{aligned}&\left\langle E\right\rangle = \frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|\hat{E}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle} = mc^2 + \frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle},\\&\left\langle -E\right\rangle = \frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\left(-\hat{E}\right)\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle} = mc^2 - \frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot\hat{\mathbf{p}}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}.\end{aligned}$$

Setzen wir die Operatoren ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\left\langle E\right\rangle = \frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle} = mc^2 - \frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot i\hbar\nabla\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle},\\&\left\langle -E\right\rangle = \frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\left|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle} = mc^2 + \frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\right|\mathbf{c}\cdot i\hbar\nabla\left|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}.\end{aligned}$$

Mit den Zeitableitungen und den Gradienten folgt nach dem Zwischenschritt

$$\left\langle E\right\rangle=\frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|i\hbar\left(-\frac{iE}{\hbar}\right)\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2-\frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\mathbf{c}\cdot i\hbar\left(-\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\right)\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle},$$
$$\left\langle -E\right\rangle=\frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\left(-i\hbar\frac{iE}{\hbar}\right)\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2+\frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\mathbf{c}\cdot i\hbar\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}$$

bzw. nach Kürzen des Planckschen Wirkungsquantums das Zwischenergebnis

$$\left\langle E\right\rangle=\frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|E\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2-\frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle},$$
$$\left\langle -E\right\rangle=\frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|E\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2-\frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}.$$

Die Skalarprodukte können wir mittels der Lösungen

$$\psi_B(\mathbf{x})=-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\psi_A(\mathbf{x}),\quad \psi_A(\mathbf{x})=-\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}}{E-mc^2}\psi_B(\mathbf{x})$$

herauskürzen, so daß für Universum und Antiuniversum identische Erwartungswerte resultieren, wobei der Erwartungswert im Antiuniversum wegen der CPT-Transformation natürlich negativ ist:

$$\left\langle E\right\rangle=E=mc^2+\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E-mc^2}\frac{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_A(\mathbf{x})\middle|\psi_A(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2+\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E-mc^2},$$
$$\left\langle -E\right\rangle=E=mc^2-\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E-mc^2}\frac{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}{\left\langle\psi_B(\mathbf{x})\middle|\psi_B(\mathbf{x})\right\rangle}=mc^2+\frac{(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2}{E-mc^2}.$$

In beiden Paralleluniversen gilt daher dieselbe Eigenwertgleichung $\left(E-mc^2\right)^2=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{p})^2$ mit identischen Lösungen $E=mc^2\pm\mathbf{c}\cdot\mathbf{p},$ aber negativen Energien $\left\langle E\right\rangle=-E$ im Antiuniversum. Die Ruheenergie entspricht dabei der potentiellen Energie des Alls, der Impulsterm der kinetischen. Wenn die kinetische Energie maximal wird, also kurz vor dem Urknall, verschwindet die Ruheenergie vollständig, das All bewegt sich dann mit Lichtgeschwindigkeit, es besteht ausschließlich aus Photonen, die durch keinerlei Materie mehr absorbiert werden können. Auch das Proton ist dann zerfallen. Wenn die kinetische Energie umgekehrt noch null ist, also im nichtrelativistischen Fall kurz nach dem Urknall, ist alle Energie im All ausschließlich potentielle sprich Ruhenergie. Das Weltall muß also erst Fahrt aufnehmen, um seine potentielle Energie loszuwerden.

Negative Energien sind in unserem Universum nicht möglich. Masse muß also aus energetischen Monopolen bestehen, die zusammen mit Antimasse energetische Dipole bilden. Die Dipolbildung erfolgt regelmäßig beim Urknall, wenn Masse und Antimasse durch Dipolbildung erneut entstehen und sich gegenseitig abstoßen. Die verschwindende Gesamtenergie von Universum und Antiuniversum ändert sich dabei nicht. Hierzu hat Stephen Hawking zutreffend bemerkt: „Warum sollte das All Energie haben?“ Die Realität ist die Polarisierung des Nichts. Gleichartige Massen ziehen sich an, ungleichartige stoßen sich ab. Bei Ladungen verhält es sich genau umgekehrt: Gleichartige Ladungen stoßen sich ab, ungleichartige ziehen sich an. Es zeichnet sich daher ab, daß Gravitonen verschränkt sind und die Gravitationskraft eine Austauschwechselwirkung ist. Aber das ist eine andere Geschichte.

