Aufgabe: Erklären Sie, warum Schwankungen der Sonnenenergie keinen Einfluß auf den Klimawandel haben.

Beweis: Sei I_0 die einfallende Sonnenintensität, die sich sofort um den an der Atmosphäre reflektierten Anteil

$$I_R^{(1)} = R_1 I_0$$

verringert, wobei R_1 der Reflexionskoeffizient der Lufthülle ist. Der verbleibende Anteil wird einerseits von der Lufthülle durchgelassen,

$$I_T^{(1)} = \left(1 - R_1\right) I_0 e^{-E_1}$$

– wobei E_1 die Extinktion der Atmosphäre ist –, andererseits von dieser absorbiert,

$$I_A^{(1)} = \left(1 - R_1\right) I_0 \left(1 - e^{-E_1}\right).$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt nach Addition aller Beiträge wie erwartet

$$I_T^{(1)} + I_A^{(1)} + I_R^{(1)} = \left(1 - R_1\right) I_0 + R_1 I_0 = I_0.$$

Der transmittierte Anteil wird zum Teil an der Erdoberfläche reflektiert – wobei R_2 der Reflexionskoeffizient der Erdoberfläche ist –,

$$I_R^{(2)} = R_2 I_T^{(1)} = R_2 \left(1 - R_1\right) I_0 e^{-E_1},$$

zum Teil durchdringt er den Erdmantel,[1]

$$I_T^{(2)} = \left(1 - R_2\right) I_T^{(1)} e^{-E_2} = \left(1 - R_1\right)\left(1 - R_2\right) I_0 e^{-\left(E_1 + E_2\right)}.$$

Der von der Erdoberfläche absorbierte Anteil beträgt

$$I_A^{(2)} = \left(1 - R_2\right) I_T^{(1)} \left(1 - e^{-E_2}\right) = \left(1 - R_1\right)\left(1 - R_2\right) I_0 e^{-E_1} \left(1 - e^{-E_2}\right).$$

Wieder gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$\begin{aligned} I_T^{(2)} + I_A^{(2)} + I_R^{(2)} &= \left(1 - R_2\right)\left(1 - R_1\right) I_0 e^{-\left(E_1 + E_2\right)} + \left(1 - R_2\right)\left(1 - R_1\right) I_0 e^{-E_1} \left(1 - e^{-E_2}\right) \\ &\quad + R_2 \left(1 - R_1\right) I_0 e^{-E_1} = \left(1 - R_1\right) I_0 e^{-E_1} = I_T^{(1)}. \end{aligned}$$

Man kann nun dieses Spiel unendlich weitertreiben und wird im nächsten Schritt finden, daß

$$I_T^{(3)} + I_A^{(3)} + I_R^{(3)} = I_T^{(2)}.$$

[1] Dies ist nur eine theoretische Aussage.

Setzen wir $I_T^{(0)} = I_0$, folgt die allgemeine Regel

$$I_T^{(n)} + I_A^{(n)} + I_R^{(n)} = I_T^{(n-1)},$$

die im Limes gegen Null geht,

$$\lim_{n\to\infty}\left(I_T^{(n)} + I_A^{(n)} + I_R^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} I_T^{(n-1)} = 0,$$

weil mit jedem Hin- und Herlaufen die Transmission immer weiter abnimmt. Letzten Endes gleichen sich alle Energieunterschiede aus.

Aufgrund des Energieerhaltungssatzes behält die Erde die aufgenommene Energie nicht, sondern gibt sie vollständig an das Weltall zurück. Was absorbiert wurde, versetzt die festen, flüssigen und gasförmigen Bestandteile unseres Planeten mit einer bestimmten Verweildauer in einen angeregten Zustand, der jedoch nur so lange andauert, bis diese Zustände wieder in ihren Grundzustand zurückgekehrt sind und die absorbierten Photonen als Strahlung wieder emittiert werden. Sie verlassen die Erde in Form von transmittierter Intensität und werden in den Weltraum abgestrahlt. Ein neues Strahlungsgleichgewicht stellt sich jedoch nur dann ein, wenn eine Stoffumwandlung im großen Stil hin zu höher absorbierenden Materialien stattfindet, etwa durch Anreicherung von Kohlenstoffdioxid in der Atmosphäre. Zwischen Erde und Sonne herrscht also Strahlungsgleichgewicht, d.h. die Erde absorbiert genausoviel Strahlung wie sie emittiert. Demzufolge kann sie sich durch Sonneneinstrahlung allein nicht aufheizen.[2] Das ist erst möglich, wenn die Atmosphäre die eingestrahlte Wärme dauerhaft festhält, z.B. durch Erhöhung der Wärmekapazität infolge einer steigenden Zahl an Absorbermolekülen.

Erhöhen wir beispielsweise die Strahlungsintensität um den Faktor $\alpha > 1$, erhöhen sich auch die transmittierte, die absorbierte und die reflektierte Intensität,

$$I_T(\alpha) = \alpha I_T, \quad I_A(\alpha) = \alpha I_A, \quad I_R(\alpha) = \alpha I_R,$$

aber Transmission, Absorption und Reflexion bleiben gleich,

$$T(\alpha) = \frac{I_T(\alpha)}{\alpha I_0} = \frac{\alpha(1-R)I_0 e^{-E}}{\alpha I_0} = \frac{I_T}{I_0} = T,$$

$$A(\alpha) = \frac{I_A(\alpha)}{\alpha I_0} = \frac{\alpha(1-R)I_0\left(1-e^{-E}\right)}{\alpha I_0} = \frac{I_A}{I_0} = A,$$

$$R(\alpha) = \frac{I_R(\alpha)}{\alpha I_0} = \frac{\alpha R I_0}{\alpha I_0} = \frac{I_R}{I_0} = R.$$

Für die Erhöhung der Wärmekapazität ist daher ausschließlich die Extinktion verantwortlich,

[2] Selbst wenn uns der Boden unter den Füßen wegschmelzen sollte und wir über Lava wandern, würde das die Erdatmosphäre nicht aufheizen, auch wenn wir selbst dabei verbrennen.

$$E = -\ln \frac{I_T}{(1-R)I_0} = \ln \frac{(1-R)I_0}{TI_0} = \ln \frac{1-R}{1-R-A},$$

die jedoch von der Strahlungsintensität nicht abhängt.[3] Der Extinktionskoeffizient $E = \varepsilon c d$ ist gegeben durch das Lambert-Beersche Gesetz

$$I_T = I_0 (1-R) e^{-\varepsilon c d},$$

welches man üblicherweise für $R = 0$ angibt. Dabei ist c die Stoffmengenkonzentration des Kohlendioxids in der Atmosphäre, d die Dicke der Atmosphäre und ε der molare Absorptionskoeffizient. Insofern spielt auch der schwankende Abstand zur Sonne keine Rolle, da dieser sich nur durch eine Änderung der Strahlungsintensität bemerkbar machen würde. Weder die Dicke der Atmosphäre noch der konstante Absorptionskoeffizient spielen für die Extinktionsänderung eine Rolle, maßgeblich ist ausschließlich die Konzentration Infrarotstrahlung absorbierender Moleküle. Insofern sind es nur zwei Größen, die sich auf einen Temperaturanstieg auswirken: der Volumenanteil absorbierender Moleküle ϕ und die Zahl der Freiheitsgrade des absorbierenden Moleküls f. Ein einatomiges Gasmolekül hat 3 Freiheitsgrade der Translation, jedoch 0 Freiheitsgrade der Rotation und der Vibration. Ein dreiatomiges lineares Gasmolekül wie das Kohlendioxid hat 3 Freiheitsgrade der Translation, 2 Freiheitsgrade der Rotation und 4 Freiheitsgrade der Vibration, also insgesamt 9 Freiheitsgrade. Dies kann man rechnerisch wie folgt zeigen:

Die Wärmekapazität eines Moleküls mit mehreren Freiheitsgraden berechnet sich gemäß

$$C_V = \frac{f}{2} nR$$

aus der Molzahl n und der Zahl der Freiheitsgrade f, wobei R die ideale Gaskonstante ist. Die Stoffmenge ermitteln wir aus der Masse des in der Luft enthaltenen Kohlendioxids und seiner Molaren Masse M, wobei wir die Masse mit Hilfe des Volumenbruchs $\phi = 400\ \mathrm{ppm}$ aus der Masse der Atmosphäre

$$m_L = 5{,}153 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg}$$

bestimmen. Das ergibt einen Wert von

$$m_{CO2} = \phi \cdot m_L = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 5{,}153 \cdot 10^{18}\,\mathrm{kg} = 2{,}205 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg}.$$

Die entsprechende Stoffmenge beträgt damit

$$n = \frac{m_{CO2}}{M} = \frac{2{,}205 \cdot 10^{18}\,\mathrm{g}}{44{,}01\,\mathrm{g\ mol^{-1}}} = 5{,}01 \cdot 10^{16}\ \mathrm{mol},$$

[3] Dieser Umstand wird von Klimakritikern häufig bestritten, die eine Zunahme der Sonneneinstrahlung für den Treibhauseffekt verantwortlich machen wollen.

und mit der spezifischen Wärmekapazität von Kohlendioxid erhalten wir

$$C_V = m_{CO2} c_V = 2,205 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg} \cdot 0,818 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}} = 1,804 \cdot 10^{15} \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{K}}.$$

Machen wir die Probe aufs Exempel, so ergibt sich die Zahl der Freiheitsgrade zu

$$f = \frac{2C_V}{nR} = \frac{2 \cdot 1,804 \cdot 10^{18}\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}}{5,01 \cdot 10^{16}\,\mathrm{mol} \cdot 8,314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}} = \frac{2 \cdot 1,804 \cdot 100}{5,01 \cdot 8,314} = 8,66 \approx 9.$$

Für die Berechnung der Temperaturerhöhung verwenden wir den ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Im Falle, daß keine Expansionsarbeit verrichtet wird, lautet dieser

$$\Delta U = \Delta Q = T \Delta S,$$

wobei ΔU die Änderung der inneren Energie, ΔQ die Änderung der Wärmemenge, T die absolute Temperatur und ΔS die Entropieänderung ist. Die tatsächlichen Werte richten sich nach der Zahl der Freiheitsgrade f, denn aus

$$\Delta U = C_V \Delta T = \frac{f}{2} nR \Delta T = f \Delta U_f$$

folgt für die Entropie

$$\Delta S = \frac{\Delta U}{T} = f \frac{\Delta U_f}{T} = f \Delta S_f.$$

Die Entropie je Freiheitsgrad beträgt also

$$\Delta S_f = \frac{1}{2} nR \frac{\Delta T}{T}.$$

Wenn wir annehmen, daß die Mischungsenthalpie für ideale Mischungen nach dem Raoultschen Gesetz gleich null ist und es keinerlei Wechselwirkungen zwischen den Molekülen gibt, können wir die Entropieänderung aus der Mischung von Kohlendioxid mit Luft berechnen. Die Änderung der Entropie pro Freiheitsgrad ist dann nach dem Flory-Huggins-Modell gegeben durch

$$\Delta S_f = -nR\left(\phi \ln \phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right).$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich

$$\frac{1}{2} nR \frac{\Delta T}{T} = -nR\left(\phi \ln \phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right),$$

was nach ΔT aufgelöst die Berechnung der Temperaturerhöhung pro Freiheitsgrad gestattet,

$$\Delta T = -2T\left(\phi \ln \phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right).$$

Dabei müssen wir unseren Berechnungen den Temperaturwert $T_0 = 255\ \mathrm{K}$ zugrunde legen, da dieser dem Wert $\phi = 0$ entspricht. Beim derzeitigen Abteil $\phi_2 = 400\ \mathrm{ppm}$ beträgt

$$\phi_2 \ln \phi_2 + (1-\phi_2)\ln(1-\phi_2) = 0,00353$$

und beim vorindustriellen Wert $\phi_1 = 278\ \mathrm{ppm}$ ist

$$\phi_1 \ln \phi_1 + (1-\phi_1)\ln(1-\phi_1) = 0,00255.$$

Demzufolge gilt

$$\begin{aligned}\Delta T_2 &= -2T_0\left(\phi_2 \ln \phi_2 + (1-\phi_2)\ln(1-\phi_2)\right) = 2\cdot 255\cdot 0,00353\,\mathrm{K} = 1,8\,\mathrm{K},\\ \Delta T_1 &= -2T_0\left(\phi_1 \ln \phi_1 + (1-\phi_1)\ln(1-\phi_1)\right) = 2\cdot 255\cdot 0,00255\,\mathrm{K} = 1,3\,\mathrm{K}.\end{aligned}$$

Der Temperaturmittelwert hat sich also gegenüber dem vorindustriellen Zeitalter um

$$\Delta T = \Delta T_2 - \Delta T_1 \approx 2\cdot 255\cdot 0,001\,\mathrm{K} = 510\cdot 0,001\,\mathrm{K} = 0,51\,\mathrm{K}$$

pro Freiheitsgrad erhöht, also um insgesamt 4,59 K. Die Abhängigkeit der Temperaturdifferenz pro Freiheitsgrad vom Volumenbruch ϕ ist in Abb. 1 für einige Werte graphisch dargestellt.

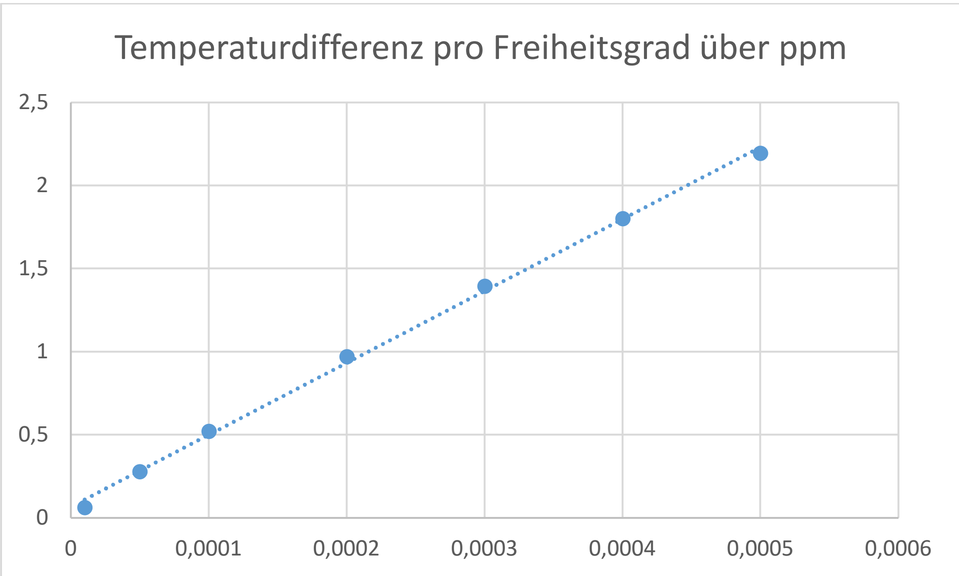

Abbildung 1. Anstieg der Temperatur als Funktion des CO2-Anteils

Für die CO2-Konzentrationen gelten nach dieser Skalierung folgende Temperaturwerte:

- 0 ppm entsprechen 0 °C über -18 °C, d.h. 255 K oder -18 °C;
- 278 ppm entsprechen 23 °C über -18 °C, d.h. 278 K oder 5 °C;
- 400 ppm entsprechen 33 °C über -18 °C, d.h. 288 K oder 15 °C.

Demnach ist die Temperatur seit dem vorindustriellen Zeitalter global um 10 °C angestiegen, d.h. der Mittelwert um die Hälfte, das sind 5 °C. Das vorindustrielle Zeitalter lag demnach um

$$\Delta T_{278} = \overline{T}_{278} - 255\,\mathrm{K} = \frac{278\,\mathrm{ppm}}{400\,\mathrm{ppm}}\left(\overline{T}_{400} - 255\,\mathrm{K}\right)$$
$$= \frac{278\,\mathrm{ppm}}{400\,\mathrm{ppm}}\left(288\,\mathrm{K} - 255\,\mathrm{K}\right) = 22{,}9\,\mathrm{K} \approx 23\,°\mathrm{C}$$

über dem Wert, der dem völligen Fehlen von CO_2 entspricht. Das wiederum ergibt einen langjährigen Mittelwert von $\overline{T}_{278} = \Delta T_{278} + 255\,\mathrm{K} \approx 23\,\mathrm{K} + 255\,\mathrm{K} = 278\,\mathrm{K}$ oder $5\,°\mathrm{C}$.[4]

[4] Es mag reiner Zufall sein, daß 278 ppm genau 278 K entsprechen.

