Aufgabe: Berechnen Sie den Dirac-Operator des reziproken Raums, lösen Sie die Eigenwertgleichungen für Impulsenergie und Raumzeit und zeigen Sie, daß der Weltoperator auf die Weltwellenfunktion angewandt Lösungen der Weltformel liefert.

Lösung: Ehe wir uns an die Herleitung der reziproken Dirac-Gleichung machen, wiederholen wir zunächst die Herleitung der gewöhnlichen Dirac-Gleichung. Ausgehend von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen der Ruhemasse *m*,

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2,$$

ersetzen wir die klassischen Größen für Energie E und Impuls $\mathbf{p}$ durch die quantenmechanischen Operatoren

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla,$$

wobei $\hbar$ das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist, i die imaginäre Einheit und c die Lichtgeschwindigkeit. Wenden wir diese Beziehung auf die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x})$ an, wobei $\mathbf{x} = (ct, x, y, z)$ ein Vierervektor aus der mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierten Zeit t und den Ortskoordinaten x, y und z ist, erhalten wir die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\left(i^2\hbar^2\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - i^2\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - m^2c^2\right)\psi(\mathbf{x}) = 0$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\mathbf{x}) = 0.$$

Darin ist

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

der Laplace- bzw. der quadrierte Nabla-Operator. Durch Einführung der Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bietet sich uns der Vorteil, daß die Klein-Gordon-Gleichung als Matrixgleichung geschrieben werden kann, denn es gilt

$$\gamma^0\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

$$\gamma^1\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\gamma^0\gamma^0,$$

$$\gamma^2\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i^2 \end{pmatrix} = -\gamma^0\gamma^0,$$

$$\gamma^3\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\gamma^0\gamma^0.$$

Dabei ist **I** eine vierdimensionale Einheitsmatrix. Insgesamt gilt also

$$\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^1\gamma^1 = -\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^3\gamma^3 = \mathbf{I}.$$

Multiplizieren wir diese Matrizen mit den jeweiligen Ableitungen der Klein-Gordon-Gleichung, so folgt

$$\left(i^2\hbar^2\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + i^2\hbar^2\gamma^1\gamma^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i^2\hbar^2\gamma^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i^2\hbar^2\gamma^3\gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2c^2 \right)\psi(\mathbf{x}) = 0$$

und nach Quadrieren

$$\left(\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - m^2c^2 \right)\psi(\mathbf{x}) = 0.$$

Mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \\
&=i^2\hbar^2\left(\gamma^0\gamma^0 \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}+\gamma^0\gamma^1 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+i^2\hbar^2\left(\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^1\gamma^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\gamma^1\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^1\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+i^2\hbar^2\left(\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^2\gamma^1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^2\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}+\gamma^2\gamma^3 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+i^2\hbar^2\left(\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^3\gamma^1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^3\gamma^2 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^3\gamma^3 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}$$

läßt sich weiter umformen in

$$\begin{aligned}
&\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \\
&=\left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t}\right)^2+i^2\hbar^2\left(\gamma^0\gamma^1 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^0\gamma^2 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^0\gamma^3 \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+\left(i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2+i^2\hbar^2\left(\gamma^1\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^1\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\gamma^1\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+\left(i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^2+i^2\hbar^2\left(\gamma^2\gamma^0 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^2\gamma^1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^2\gamma^3 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&+\left(i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)^2+i^2\hbar^2\left(\gamma^3\gamma^0 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma^3\gamma^1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}+\gamma^3\gamma^2 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Antisymmetrie-Relationen

$$\gamma^1\gamma^0=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=-\gamma^0\gamma^1,$$

$$\gamma^2\gamma^0=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}=-\gamma^0\gamma^2,$$

$$\gamma^3\gamma^0=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=-\gamma^0\gamma^3,$$

$$\gamma^2\gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&-i\end{pmatrix}=-\gamma^1\gamma^2,$$

$$\gamma^3\gamma^1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=-\gamma^1\gamma^3,$$

$$\gamma^3\gamma^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&i&0\end{pmatrix}=-\gamma^2\gamma^3,$$

zusammengefaßt durch

$$\begin{aligned}&\gamma^0\gamma^1=-\gamma^1\gamma^0,\quad \gamma^0\gamma^2=-\gamma^2\gamma^0,\quad \gamma^0\gamma^3=-\gamma^3\gamma^0,\\&\gamma^1\gamma^2=-\gamma^2\gamma^1,\quad \gamma^1\gamma^3=-\gamma^3\gamma^1,\\&\gamma^2\gamma^3=-\gamma^3\gamma^2,\end{aligned}$$

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}&\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\\&+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=i^2\hbar^2\left(\gamma^0\gamma^1\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{c\partial t}\right)+\gamma^0\gamma^2\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{c\partial t}\right)\right)\\&+i^2\hbar^2\left(\gamma^0\gamma^3\left(\frac{\partial}{c\partial t}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{c\partial t}\right)+\gamma^1\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)+\gamma^1\gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\\&+i^2\hbar^2\gamma^2\gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Da die Kommutatoren nach den kanonischen Vertauschungsrelationen für $i,\ j\in\{0,1,2,3\}$ wegen $\left[\hat{p}_i,\ \hat{p}_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$ verschwinden – wobei δ_{ij} die Deltafunktion ist –, verbleiben nur die Terme

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2=\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Damit nimmt die Klein-Gordon-Gleichung folgende Gestalt an:

$$\left[\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2-m^2c^2\right]\psi(\mathbf{x})=0.$$

Sie besitzt die beiden Lösungen

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\mp mc\right)\psi(\mathbf{x})=0.$$

Wählen wir das negative Vorzeichen, erhalten wir die Dirac-Gleichung in ihrer kovarianten Formulierung,

$$\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-mc\right)\psi(\mathbf{x})=0.$$

Darin ist

$$i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-mc$$

der Dirac-Operator. Wendet man auf die Dirac-Gleichung den komplex-konjugierten Dirac-Operator an,

$$\begin{aligned}0&=\left(-i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}-i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-mc\right)\\&\quad\times\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-mc\right)\psi(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

erhält man wieder die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\begin{aligned}0&=\left[\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2-m^2c^2\right]\psi(\mathbf{x})\\&=\left[\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2-m^2c^2\right]\psi(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Dirac-Matrizen den klassischen Ausdruck

$$\left[\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\right)^2-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2-\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2-m^2c^2\right]\psi\left(\mathbf{x}\right)=0,$$

in Kurzform

$$\left(c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2-m^2c^2\right)\psi\left(\mathbf{x}\right)=0.$$

Multipliziert man die Dirac-Gleichung mit γ^0 und löst nach dem Energie-Operator auf, folgt die Schrödinger-Form der Dirac-Gleichung,

$$i\hbar\gamma^0\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\mathbf{x}\right)=\left[-i\hbar\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}+mc\gamma^0\right]\psi\left(\mathbf{x}\right).$$

Substituieren wir in dieser Gleichung die nachfolgenden Matrizen,

$$\gamma^0\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\gamma^0\gamma^1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^0\gamma^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\gamma^0\gamma^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

ergibt sich

$$i\hbar\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial t}=\left[-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right.$$
$$\left.-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}+mc\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right]\psi(\mathbf{x}).$$

Nach Einführung der Pauli-Matrizen

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

können wir schreiben

$$i\hbar\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&\sigma_0\end{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial t}=\left[-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_1\\\sigma_1&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_2\\\sigma_2&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\right.$$
$$\left.-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_3\\\sigma_3&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial z}+mc\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&-\sigma_0\end{pmatrix}\right]\psi(\mathbf{x})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix}\left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-mc\right)\sigma_0 & i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial z}\\ i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial z} & \left(i\hbar\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+mc\right)\sigma_0\end{pmatrix}\psi(\mathbf{x})=0.$$

Um auf die Einheitsmatrix zu transformieren, multiplizieren wir die zweite Zeile mit -1 und substituieren die nullte Pauli-Matrix durch die Einheitsmatrix $\sigma_0=\mathbf{I}$. Somit lautet die endgültige Form der Dirac-Gleichung

$$\begin{pmatrix}\left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}-mc\right)\mathbf{I} & i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial z}\\ -i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}-i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}-i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial z} & \left(-i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}-mc\right)\mathbf{I}\end{pmatrix}\psi(\mathbf{x})=0.$$

Wenn wir für $\psi(\mathbf{x})$ eine ebene Welle der Form $\psi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ ansetzen, ergeben sich die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}) = -i\omega\phi(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{x}) = ik_x\phi(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\psi(\mathbf{x}) = ik_x\phi(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{x}) = ik_z\phi(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}.$$

Fügen wir diese in die Dirac-Gleichung ein, sieht die Dirac-Gleichung zunächst wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \left(-i^2\frac{\hbar\omega}{c} - mc\right)\mathbf{I}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} & i^2\left(\sigma_1\hbar k_x + \sigma_2\hbar k_y + \sigma_3\hbar k_z\right)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \\ -i^2\left(\sigma_1\hbar k_x + \sigma_2\hbar k_y + \sigma_3\hbar k_z\right)e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} & \left(i^2\frac{\hbar\omega}{c} - mc\right)\mathbf{I}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \end{pmatrix}\phi(\mathbf{p}) = 0.$$

Nach Kürzen der Exponentialfunktion können wir einfacher schreiben:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - mc\right)\mathbf{I} & -\left(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z\right) \\ \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z & \left(-\frac{E}{c} - mc\right)\mathbf{I} \end{pmatrix}\phi(\mathbf{p}) = 0,$$

oder noch einfacher, wenn wir $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z$ als Skalarprodukt auffassen,

$$\begin{pmatrix} \left(c^{-1}E - mc\right)\mathbf{I} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & \left(-c^{-1}E - mc\right)\mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_A(\mathbf{p}) \\ \phi_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = 0,$$

mit dem zweidimensionalen Eigenvektor

$$\phi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi_A(\mathbf{p}) \\ \phi_B(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$\phi_A(\mathbf{p}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{c^{-1}E - mc}\phi_B(\mathbf{p}), \quad \phi_B(\mathbf{p}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{c^{-1}E + mc}\phi_A(\mathbf{p}).$$

Eliminieren wir in der ersten Gleichung $\phi_B(\mathbf{p})$ mit Hilfe der zweiten, so ist

$$\phi_A(\mathbf{p}) = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{c^{-2}E^2 - m^2c^2}\phi_A(\mathbf{p}).$$

Diese Lösung entspricht aber genau der Klein-Gordon-Gleichung

$$E^2 = m^2c^4 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 c^2.$$

Mit den Vektoren $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ und $\mathbf{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$ können wir das Quadrat des Skalarprodukts leicht berechnen:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 &= (\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z)(\sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z) \\ &= \sigma_1^2 p_x^2 + \sigma_2\sigma_1 p_y p_x + \sigma_3\sigma_1 p_z p_x \\ &\quad +\sigma_1\sigma_2 p_x p_y + \sigma_2^2 p_y^2 + \sigma_3\sigma_2 p_z p_y \\ &\quad +\sigma_1\sigma_3 p_x p_z + \sigma_2\sigma_3 p_y p_z + \sigma_3^2 p_z^2.\end{aligned}$$

Aufgrund der Antikommutativität der Pauli-Matrizen

$$\begin{aligned}\sigma_2\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -\sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_3\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1\sigma_3, \\ \sigma_3\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2\sigma_3\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 &= \sigma_1^2 p_x^2 - \sigma_1\sigma_2 p_y p_x - \sigma_1\sigma_3 p_z p_x + \sigma_1\sigma_2 p_x p_y \\ &\quad +\sigma_2^2 p_y^2 - \sigma_2\sigma_3 p_z p_y + \sigma_1\sigma_3 p_x p_z + \sigma_2\sigma_3 p_y p_z + \sigma_3^2 p_z^2 \\ &= \sigma_1^2 p_x^2 + \sigma_2^2 p_y^2 + \sigma_3^2 p_z^2 + \sigma_1\sigma_2 (p_x p_y - p_y p_x) \\ &\quad +\sigma_1\sigma_3 (p_x p_z - p_z p_x) + \sigma_2\sigma_3 (p_y p_z - p_z p_y).\end{aligned}$$

Da die Kommutatoren aufgrund der Vertauschungsrelationen für $i,\ j \in \{0, 1, 2, 3\}$ verschwinden, verbleiben wegen $[\hat{p}_i,\ \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ nur die Terme

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \sigma_1^2 p_x^2 + \sigma_2^2 p_y^2 + \sigma_3^2 p_z^2,$$

was dann wegen der Gleichheit der Quadrate der Pauli-Matrizen

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

in die Identität $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2 = \mathbf{I}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \mathbf{p}^2\mathbf{I}$ übergeht.

Das gleiche Prozedere können wir auch mit der zweiten Gleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie anstellen. Ausgehend von der Raumzeitbeziehung für ein freies Teilchen mit der Ruhezeit τ,

$$t^2 = \tau^2 + \mathbf{r}^2 c^{-2},$$

ersetzen wir die klassischen Größen für Raum und Zeit durch die quantenmechanischen Operatoren

$$\hat{t} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial E} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{r}} = i\hbar \nabla_p$$

und wenden diese auf die Wellenfunktion $\phi(\mathbf{p})$ an, wobei $\mathbf{p} = \left(c^{-1}E,\, p_x,\, p_y,\, p_z\right)$ ein Vierervektor aus der mit der reziproken Lichtgeschwindigkeit multiplizierten Energie E und den Impulskoordinaten p_x, p_y und p_z ist. Damit erhalten wir die reziproke Klein-Gordon-Gleichung,

$$\left[i^2\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial E^2} - i^2\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \right) - \tau^2 c^2 \right] \phi(\mathbf{p}) = 0$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial E^2} - \nabla_p^2 + \frac{\tau^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(\mathbf{p}) = 0.$$

Darin ist

$$\Delta_p = \nabla_p^2 = \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}$$

der Laplace- bzw. Nabla-Operator des Impulses im Quadrat. Ähnlich wie oben läßt sich mit den Dirac-Matrizen

$$\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^1\gamma^1 = -\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^3\gamma^3 = \mathbf{I}$$

zeigen, daß

$$\left[\left(i\hbar\gamma^0 c \frac{\partial}{\partial E} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial p_y} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial p_z} \right)^2 - \tau^2 c^2 \right] \phi(\mathbf{p}) = 0.$$

Darin erkennt man unschwer den Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$s^2 = c^2\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial E}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2$$
$$=\left(\gamma^0 c\hat{t}\right)^2+\left(\gamma^1\hat{x}\right)^2+\left(\gamma^2\hat{y}\right)^2+\left(\gamma^3\hat{z}\right)^2=\left[c^2\hat{t}^2-\left(\hat{x}^2+\hat{y}^2+\hat{z}^2\right)\right]\mathbf{I},$$

nur eben in 4×4 Dimensionen. Aus der besagten Identität

$$\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2$$
$$=i^2\hbar^2\left(\gamma^0\gamma^0c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}+\gamma^0\gamma^1c\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_x}+\gamma^0\gamma^2c\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_y}+\gamma^0\gamma^3c\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_z}\right)$$
$$+i^2\hbar^2\left(\gamma^1\gamma^0c\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial E}+\gamma^1\gamma^1\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\gamma^1\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial p_y}+\gamma^1\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial p_z}\right)$$
$$+i^2\hbar^2\left(\gamma^2\gamma^0c\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial E}+\gamma^2\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial p_x}+\gamma^2\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}+\gamma^2\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial p_z}\right)$$
$$+i^2\hbar^2\left(\gamma^3\gamma^0c\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial E}+\gamma^3\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial p_x}+\gamma^3\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial p_y}+\gamma^3\gamma^3\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)$$

ergibt sich weiter

$$\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2$$
$$=\left(i\hbar\gamma^0c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2$$
$$+i^2\hbar^2c\left[\gamma^0\gamma^1\left(\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_x}-\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial E}\right)+\gamma^0\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_y}-\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial E}\right)\right]$$
$$+i^2\hbar^2\left[\gamma^0\gamma^3c\left(\frac{\partial}{\partial E}\frac{\partial}{\partial p_z}-\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial E}\right)+\gamma^1\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial p_y}-\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial p_x}\right)\right]$$
$$+i^2\hbar^2\left[\gamma^1\gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial p_x}\frac{\partial}{\partial p_z}-\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial p_x}\right)+\gamma^2\gamma^3\left(\frac{\partial}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial p_z}-\frac{\partial}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\right].$$

Da die Kommutatoren nach den kanonischen Vertauschungsrelationen für $i,\, j\in\{0,1,2,3\}$ wegen $\left[\hat{x}_i,\hat{x}_j\right]=i\hbar\delta_{ij}$ verschwinden, erhalten wir schließlich

$$\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2$$
$$=\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2.$$

Damit nimmt die reziproke Klein-Gordon-Gleichung folgende Gestalt an:

$$\left[\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2-\tau^2c^2\right]\phi(\mathbf{p})=0.$$

Sie besitzt die beiden Lösungen

$$\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\mp\tau c\right)\phi(\mathbf{p})=0.$$

Die mit dem negativen Vorzeichen ist die der reziproken Dirac-Gleichung

$$\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}-\tau c\right)\phi(\mathbf{p})=0,$$

und

$$i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}-\tau c$$

ist der reziproke Dirac-Operator, wobei

$$\hat{s}=i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}$$

dem Operator des vierdimensionalen Wegelements entspricht. Wendet man nun auf die reziproke Dirac-Gleichung den komplex-konjugierten reziproken Dirac-Operator an,

$$0=\left(-i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}-i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}-i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}-i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}-\tau c\right)$$
$$\times\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}-\tau c\right)\phi(\mathbf{p})$$

erhält man wieder die Klein-Gordon-Gleichung,

$$0=\left[\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}+i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2-\tau^2c^2\right]\phi(\mathbf{p})$$
$$=\left[\left(i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2+\left(i\hbar\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2-\tau^2c^2\right]\phi(\mathbf{p}),$$

und nach Einsetzen der Dirac-Matrizen den klassischen Ausdruck

$$\left[\left(-i\hbar c\frac{\partial}{\partial E}\right)^2-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}\right)^2-\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z}\right)^2-\tau^2c^2\right]\phi(\mathbf{p})=0,$$

in Kurzform

$$\left(c^2\hat{t}^2-\hat{\mathbf{r}}^2-\tau^2c^2\right)\phi(\mathbf{p})=0.$$

Multipliziert man die reziproke Dirac-Gleichung mit γ^0 und löst nach dem Energie-Operator auf, folgt die reziproke Schrödinger-Form der Dirac-Gleichung,

$$i\hbar c\gamma^0\gamma^0\frac{\partial}{\partial E}\phi(\mathbf{p})=\left[-i\hbar\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial p_x}-i\hbar\gamma^0\gamma^2\frac{\partial}{\partial p_y}-i\hbar\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial p_z}+\tau c\gamma^0\right]\phi(\mathbf{p}).$$

Setzen wir in diese wie gehabt die Dirac-Matrizen ein, ergibt sich

$$i\hbar c\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial E}\phi(\mathbf{p})=\left[-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_x}-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_y}\right.$$
$$\left.-i\hbar\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_z}+\tau c\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right]\phi(\mathbf{p}).$$

Nach Einfügung der Pauli-Matrizen folgt analog

$$i\hbar c\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&\sigma_0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial E}\phi(\mathbf{p})=\left[-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_1\\\sigma_1&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_x}-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_2\\\sigma_2&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_y}\right.$$
$$\left.-i\hbar\begin{pmatrix}0&\sigma_3\\\sigma_3&0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial p_z}+\tau c\begin{pmatrix}\sigma_0&0\\0&-\sigma_0\end{pmatrix}\right]\phi(\mathbf{p})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \left(i\hbar\frac{c\partial}{\partial E}-\tau c\right)\sigma_0 & i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial p_z} \\ i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial p_z} & \left(i\hbar\frac{c\partial}{\partial E}+\tau c\right)\sigma_0 \end{pmatrix}\phi(\mathbf{p})=0.$$

Wie gehabt multiplizieren wir die zweite Zeile mit -1 und substituieren die nullte Pauli-Matrix durch die Einheitsmatrix $\sigma_0=\mathbf{I}$. Somit lautet die endgültige Form der reziproken Dirac-Gleichung

$$\begin{pmatrix} \left(i\hbar\frac{c\partial}{\partial E}-\tau c\right)\mathbf{I} & i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial p_x}+i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial p_y}+i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial p_z} \\ -i\hbar\sigma_1\frac{\partial}{\partial p_x}-i\hbar\sigma_2\frac{\partial}{\partial p_y}-i\hbar\sigma_3\frac{\partial}{\partial p_z} & \left(-i\hbar\frac{c\partial}{\partial E}-\tau c\right)\mathbf{I} \end{pmatrix}\phi(\mathbf{p})=0.$$

Entsprechend setzen wir für $\phi(\mathbf{p})$ wieder eine ebene Welle der Form $\phi(\mathbf{p})=\psi(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}$ an, daher gilt für die Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial E}\phi(\mathbf{p})=-i\frac{t}{\hbar}\psi(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},\quad \frac{\partial}{\partial p_x}\phi(\mathbf{p})=i\frac{x}{\hbar}\psi(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},$$
$$\frac{\partial}{\partial p_y}\phi(\mathbf{p})=i\frac{y}{\hbar}\psi(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar},\quad \frac{\partial}{\partial p_z}\phi(\mathbf{p})=i\frac{z}{\hbar}\psi(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar}.$$

Substituieren wir diese in der reziproken Dirac-Gleichung ein, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \left(-i^2\hbar\frac{ct}{\hbar}-\tau c\right)\mathbf{I}e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} & i^2\hbar\left(\sigma_1\frac{x}{\hbar}+\sigma_2\frac{y}{\hbar}+\sigma_3\frac{z}{\hbar}\right)e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} \\ -i^2\hbar\left(\sigma_1\frac{x}{\hbar}+\sigma_2\frac{y}{\hbar}+\sigma_3\frac{z}{\hbar}\right)e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} & \left(i^2\hbar\frac{ct}{\hbar}-\tau c\right)\mathbf{I}e^{i(\mathbf{pr}-Et)/\hbar} \end{pmatrix}\psi(\mathbf{x})=0.$$

Nach Kürzung der Exponentialfunktion und des Planckschen Wirkungsquantums können wir diese Matrix mit $s=\tau c$ einfacher schreiben als

$$\begin{pmatrix} (ct-s)\mathbf{I} & -(\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z) \\ \sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z & (-ct-s)\mathbf{I} \end{pmatrix}\psi(\mathbf{x})=0$$

oder, wenn wir die Kurzform $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}=\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z$ für das Skalarprodukt verwenden,

$$\begin{pmatrix} (ct-s)\mathbf{I} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r} & (-ct-s)\mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_A(\mathbf{x}) \\ \psi_B(\mathbf{x}) \end{pmatrix}=0,$$

mit dem zweidimensionalen Eigenvektor

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_A(\mathbf{x}) \\ \psi_B(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem mit zwei Unbekannten

$$\psi_A(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{ct-s}\psi_B(\mathbf{x}), \quad \psi_B(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r}}{ct+s}\psi_A(\mathbf{x}).$$

Eliminieren wir $\phi_B(\mathbf{p})$ in der ersten Gleichung mit Hilfe der zweiten, so ist

$$\psi_A(\mathbf{p}) = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})^2}{c^2t^2 - s^2}\psi_A(\mathbf{p}).$$

Diese Lösung entspricht aber genau der Klein-Gordon-Gleichung

$$c^2t^2 = s^2 + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})^2.$$

Mit den Vektoren $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ und $\mathbf{r} = (x, y, z)$ folgt aufgrund der Gleichheit der quadratischen Pauli-Matrizen die Identität $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{r})^2 = \sigma_1^2 x^2 + \sigma_2^2 y^2 + \sigma_3^2 z^2 = \mathbf{r}^2\mathbf{I}$ und damit das relativistische Wegelement

$$s^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Fassen wir nun die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen. Die beiden Dirac-Gleichungen, welche die Welt – bezogen auf die Masse – quantenmechanisch vollkommen beschreiben, lauten

$$\left(i\hbar c^{-1}\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - mc\right)\psi(\mathbf{x}) = 0,$$
$$\left(i\hbar c\gamma^0 \frac{\partial}{\partial E} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial p_x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial p_y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial p_z} - \tau c\right)\phi(\mathbf{p}) = 0.$$

Die Dirac-Operatoren lassen sich anschaulicher als vierdimensionale Orts- und Impulsoperatoren angeben:

$$\hat{p} = i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z},$$
$$\hat{s} = i\hbar\gamma^0 c\frac{\partial}{\partial E} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial p_x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial p_y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial p_z}.$$

In ihnen ist die vollständige Information über die Drehimpulse enthalten.

Indem wir jeweils mit dem komplex-konjugierten Dirac-Operator multiplizieren, erhalten wir durch Entkoppeln der acht Differentialgleichungen für jede Vierer-Komponente der jeweiligen Wellenfunktion eine Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_0(\mathbf{x})\\\psi_1(\mathbf{x})\\\psi_2(\mathbf{x})\\\psi_3(\mathbf{x})\end{pmatrix}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\begin{pmatrix}\psi_0(\mathbf{x})\\\psi_1(\mathbf{x})\\\psi_2(\mathbf{x})\\\psi_3(\mathbf{x})\end{pmatrix}=0,$$

$$\left(c^2\frac{\partial^2}{\partial E^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_y^2}+\frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right)\right)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_0(\mathbf{p})\\\phi_1(\mathbf{p})\\\phi_2(\mathbf{p})\\\phi_3(\mathbf{p})\end{pmatrix}+\frac{\tau^2c^2}{\hbar^2}\begin{pmatrix}\phi_0(\mathbf{p})\\\phi_1(\mathbf{p})\\\phi_2(\mathbf{p})\\\phi_3(\mathbf{p})\end{pmatrix}=0.$$

In anderer Schreibweise lauten diese Gleichungen unter Verwendung der Quabla-Operatoren

$$\left(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\begin{pmatrix}\psi_0(\mathbf{x})\\\psi_1(\mathbf{x})\\\psi_2(\mathbf{x})\\\psi_3(\mathbf{x})\end{pmatrix}=0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\Box_p+\frac{\tau^2c^2}{\hbar^2}\right)\begin{pmatrix}\phi_0(\mathbf{p})\\\phi_1(\mathbf{p})\\\phi_2(\mathbf{p})\\\phi_3(\mathbf{p})\end{pmatrix}=0.$$

Setzen wir

$$\Psi(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\psi_0(\mathbf{x})\\\psi_1(\mathbf{x})\\\psi_2(\mathbf{x})\\\psi_3(\mathbf{x})\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(\mathbf{p})=\begin{pmatrix}\phi_0(\mathbf{p})\\\phi_1(\mathbf{p})\\\phi_2(\mathbf{p})\\\phi_3(\mathbf{p})\end{pmatrix},$$

können wir auch einfach schreiben:

$$\left(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi(\mathbf{x})=0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\Box_p+\frac{\tau^2c^2}{\hbar^2}\right)\Phi(\mathbf{p})=0.$$

Da diese Operatoren nur auf ihre eigenen Wellenfunktionen wirken, lassen sich die beiden Gleichungen mittels der Produkt-Wellenfunktion

$$\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=\Psi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{p})$$

zur sogenannten Weltformel zusammenfassen,

$$\left(i^2\hbar^2\Box-p^2\right)\left(i^2\hbar^2\Box_p-s^2\right)\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0.$$

In der Klein-Gordon-Notation entspricht dies der Darstellung

$$\left(\hat{p}^2-p^2\right)\left(\hat{s}^2-s^2\right)\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0$$

mit

$$\hat{s}^2 = \left(i\hbar\gamma^0 c \frac{\partial}{\partial E} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial p_y} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial p_z} \right)^2$$
$$= \left(i\hbar\gamma^0 c \frac{\partial}{\partial E} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial p_x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial p_y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial p_z} \right)^2,$$

$$\hat{p}^2 = \left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2$$
$$= \left(i\hbar\gamma^0 \frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\hbar\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2.$$

Da die Dirac-Gleichung nur einen Eigenwert besitzt, kann man weiter vereinfachen und die Weltformel auf die Dirac-Form bringen:

$$(\hat{p} - p)(\hat{s} - s)\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$$

bzw.

$$\left(i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - p \right)\left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} - s \right)\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0.$$

Multiplizieren wir die Klammern aus, ergibt sich im ersten Schritt

$$\left[\left(i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)\left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) - s \left(i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \right.$$
$$\left. - p \left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) + sp \right] \Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$$

und im nächsten, indem wir $\phi(\mathbf{p})$ und $\psi(\mathbf{x})$ unter die Klammer ziehen,

$$\left(i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(\mathbf{x}) \right)\left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \phi(\mathbf{p}) \right) - s\phi(\mathbf{p}) \left(i\hbar \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(\mathbf{x}) \right)$$
$$- p\psi(\mathbf{x}) \left(i\hbar \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \phi(\mathbf{p}) \right) + sp\Upsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0.$$

Substituieren wir in diesem Ausdruck die folgenden Eigenwertgleichungen:

$$\hat{p}\psi(\mathbf{x}) = p\psi(\mathbf{x}),$$
$$\hat{s}\phi(\mathbf{p}) = s\phi(\mathbf{p}),$$

vereinfacht sich dieser zu

$$\left(i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi(\mathbf{x})\right)\left(i\hbar\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\phi(\mathbf{p})\right)-sp\phi(\mathbf{p})\psi(\mathbf{x})$$
$$-ps\psi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{p})+sp\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0,$$

so daß wir nach Kürzen eine Darstellung in Form eines Produkts zweier Summen erhalten,

$$\left[\left(i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right)\left(i\hbar\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\right)-ps\right]\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0.$$

Fassen wir diese Doppelsumme in einer einzigen Summe zusammen, ergibt sich

$$\left[i^2\hbar^2\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}-ps\right]\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich aufgrund der Vertauschungsrelationen $\left[\hat{x}_{\mu},\hat{p}_{\nu}\right]=i\hbar\delta_{\mu\nu}$ weiter zu

$$\left[i^2\hbar^2\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}-ps\right]\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0.$$

Das ist äquivalent zu der Formulierung

$$\left[\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}\hat{x}_{\mu}+ps\right]\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0,$$

denn aus

$$\hat{p}=\gamma^0\hat{E}-\gamma^1\hat{p}_x-\gamma^2\hat{p}_y-\gamma^3\hat{p}_z,$$
$$\hat{s}=-\gamma^0c\hat{t}+\gamma^1\hat{x}+\gamma^2\hat{y}+\gamma^3\hat{z}$$

folgt

$$\begin{aligned}\hat{p}\hat{s}&=\left(\gamma^0\hat{E}-\gamma^1\hat{p}_x-\gamma^2\hat{p}_y-\gamma^3\hat{p}_z\right)\left(-\gamma^0c\hat{t}+\gamma^1\hat{x}+\gamma^2\hat{y}+\gamma^3\hat{z}\right)\\&=-\gamma^0\gamma^0\hat{E}c\hat{t}-\gamma^1\gamma^1\hat{p}_x\hat{x}-\gamma^2\gamma^2\hat{p}_y\gamma^2\hat{y}-\gamma^3\gamma^3\hat{p}_z z\\&=-\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}\hat{x}_{\mu}.\end{aligned}$$

In seiner einfachsten Form entspricht dieser Ausdruck der Eigenwertgleichung

$$\left(\hat{p}\hat{s}-ps\right)\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p})=0$$

oder, in getrennter Darstellung, dem Gleichungssystem

$$i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\psi(\mathbf{x})=p\psi(\mathbf{x}),\quad i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}\phi(\mathbf{p})=s\phi(\mathbf{p})$$

bzw.

$$\hat{p}\psi(\mathbf{x}) = -\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\hat{p}_{\mu}\psi(\mathbf{x}) = p\psi(\mathbf{x}), \quad \hat{s} = \sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}\hat{x}_{\mu}\phi(\mathbf{p}) = s\phi(\mathbf{p}).$$

Da sich aus den relativistischen Klein-Gordon-Gleichungen

$$p^2 = c^{-2}\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 = c^{-2}\hat{E}^2 - \left(\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z\right)^2,$$
$$s^2 = c^2\hat{t}^2 - \hat{\mathbf{r}}^2 = c^2\hat{t}^2 - \left(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}\right)^2$$

die beiden Dirac-Gleichungen

$$\hat{p} = c^{-1}\hat{E} - \left(\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z\right),$$
$$\hat{s} = c\hat{t} - \hat{\mathbf{r}} = c\hat{t} - \left(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}\right)$$

als Lösungen ergeben, können wir den Weltoperator formal auch schreiben als

$$\hat{p}\hat{s} = \left(c^{-1}\hat{E} - \left(\hat{p}_x + \hat{p}_y + \hat{p}_z\right)\right)\left(c\hat{t} - \left(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}\right)\right) = \hat{E}\hat{t} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}},$$

und wenn wir die Operatoren einsetzen, folgt

$$\hat{p}\hat{s} = \left(i\hbar\frac{\partial}{c\partial t} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-i\hbar c\frac{\partial}{\partial E} - i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} - i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} - i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z}\right)$$
$$= \frac{\partial\hbar}{\partial t}\frac{\partial\hbar}{\partial E} + \frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_x} + \frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_y} + \frac{\partial\hbar}{\partial z}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}.$$

Mit

$$\hat{p}\hat{s} = \hat{E}\hat{t} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial E} + \nabla\cdot\nabla_p\right)$$

lautet die endgültige Weltformel

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t\partial E} + \nabla\cdot\nabla_p - \frac{ps}{\hbar^2}\right]\Upsilon(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 0.$$

Sie präsentiert sich als lineares Produkt von zwei Räumen, dem Energie-Impuls-Raum und dem reziproken Zeit-Ortsraum. Mit der Definition der Wirkung

$$\hbar = \mathbf{p}\cdot\mathbf{s} = Et + p_x x + p_y y + p_z z$$

und ihren partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial\hbar}{\partial t} = E, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial y} = p_y, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial z} = p_z,$$
$$\frac{\partial\hbar}{\partial E} = t, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial p_x} = x, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial p_y} = x, \quad \frac{\partial\hbar}{\partial p_z} = z$$

folgt

$$ps = Et + p_x x + p_y y + p_z z$$

bzw.

$$Et = pcsc^{-1} + \mathbf{r}c^{-1} \cdot \mathbf{p}c = mc^2\tau + \mathbf{p}c \cdot \mathbf{r}c^{-1} = \begin{pmatrix} mc^2 \\ \mathbf{p}c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \mathbf{r}c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau c \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}.$$

Bilden wir die Beträge dieser beiden Vektoren, wobei jetzt E und t Vierervektoren sind, die sich aus den statischen Ruhewerten und den dynamischen Beiträgen zusammensetzen, landen wir wieder bei den relativistischen Ausdrücken der Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 \quad \text{bzw.} \quad t^2 = \tau^2 + \mathbf{r}^2c^{-2}.$$

Der Dirac-Formalismus ermöglicht auch negative Energien und Impulse sowie negative Zeiten und Orte. Dahinter verbirgt sich jedoch nichts anderes als die CPT-Transformation des Anti-Universums. Es muß dieses Anti-Universum tatsächlich geben, sonst wäre die Welt nicht stabil und könnte nicht in sich zurückkehren, was wiederum eine Grundvoraussetzung für die Wiederholbarkeit des Urknalls ist.