

Physikaufgabe 17

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Berechnen Sie die Genauigkeit der Entfernungsmessung einer unter einem Winkel von 15° im Abstand von 300 m quer zur Flugrichtung gesichteten Wolke mit einem Durchmesser von 100 m, die mit zwei im Abstand der Flügelspannweite von 70 m angebrachten optischen Kameras angepeilt wird. Nehmen Sie vereinfachend an, daß die Wolke von kugelförmiger Gestalt sei und ihr Schwerpunkt in der Flugfläche liege. Vernachlässigen Sie Parallaxeneffekte. Wolkenränder sollen als unscharfe Kanten auf ± 1 m genau bestimmbar sein.

Lösung: Die Sensorauflösung kann für diese Aufgabenstellung vernachlässigt werden, weil die Ungenauigkeit, mit der unscharfe Wolkenkanten gemessen werden können, bedeutend größer ist. Betrachten wir zunächst die Meßanordnung in Abb. 1 mit dem Flugzeug im Koordinatenursprung und den beiden Kameras bei $y = \pm a/2$.

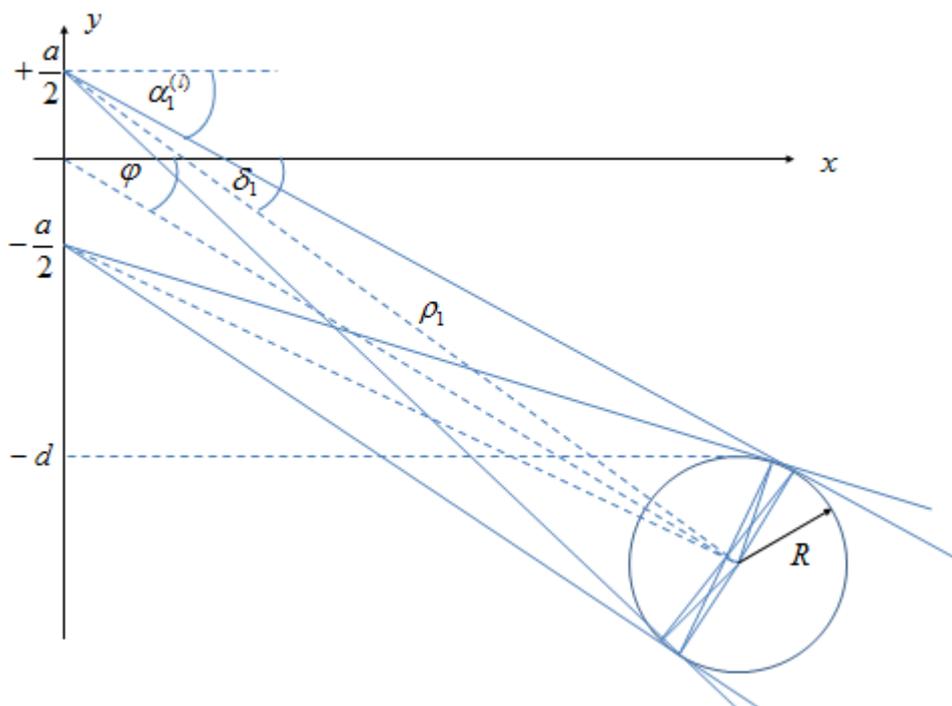


Abbildung 1. Geometrie zur Wolkenentfernungsmessung

Peilen wir die Wolkenränder mit den zwei Kameras an, so schneiden sich je zwei Peilstrahlen

$$y = f_1(x) = \frac{a}{2} + x \tan \alpha_1, \quad y = f_2(x) = -\frac{a}{2} + x \tan \alpha_2$$

im Schnittpunkt (x_S, y_S) . Dort gilt $y_S = f_1(x_S) = f_2(x_S)$ d.h.

$$x_S = \frac{a}{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{a \tan \alpha_2 + \tan \alpha_1}{2 \tan \alpha_2 - \tan \alpha_1} = \frac{x_S}{2} (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2).$$

Der Wolkenschwerpunkt (x_0, y_0) habe die Koordinaten

$$x_0 = (d + R) \cot \varphi \quad \text{und} \quad y_0 = -(d + R),$$

Physikaufgabe 17

wobei R den Wolkenradius angibt und φ der Beobachtungswinkel des Wolkenschwerpunkts vom Flugzeugschwerpunkt aus gesehen ist. Von Kamera 1 bzw. 2 aus gesehen befindet sich der Wolkenschwerpunkt an der Winkelposition

$$\delta_1 = -\arctan \frac{d+R+a/2}{(d+R)\cot\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \delta_2 = -\arctan \frac{d+R-a/2}{(d+R)\cot\varphi}$$

im Abstand

$$\rho_1 = \sqrt{(d+R)^2 \cot^2 \varphi + (d+R+a/2)^2}$$

bzw.

$$\rho_2 = \sqrt{(d+R)^2 \cot^2 \varphi + (d+R-a/2)^2}.$$

Die linken Begrenzungswinkel der Wolke von der 1. bzw. 2. Kamera aus betrachtet, $\alpha_1^{(l)}$ bzw. $\alpha_2^{(l)}$, ergeben sich dann gemäß

$$\alpha_1^{(l)} = \delta_1 + \arcsin \frac{R}{\rho_1} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_2^{(l)} = \delta_2 + \arcsin \frac{R}{\rho_2},$$

die rechten analog zu

$$\alpha_1^{(r)} = \delta_1 - \arcsin \frac{R}{\rho_1} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_2^{(r)} = \delta_2 - \arcsin \frac{R}{\rho_2}.$$

Die Koordinaten der drei Punkte des linken und des rechten Fehlerdreiecks lauten:

$$\begin{aligned} x_1^{(l)} &= x_0 + R \sin\left(\alpha_1^{(l)}\right), & y_1^{(l)} &= y_0 + R \cos\left(\alpha_1^{(l)}\right), \\ x_2^{(l)} &= x_0 + R \sin\left(\alpha_2^{(l)}\right), & y_2^{(l)} &= y_0 + R \cos\left(\alpha_2^{(l)}\right), \\ x_3^{(l)} &= \frac{a}{\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)}}, & y_3^{(l)} &= \frac{x_3^{(l)}}{2} \left(\tan \alpha_1^{(l)} + \tan \alpha_2^{(l)} \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1^{(r)} &= x_0 - R \sin\left(\alpha_1^{(r)}\right), & y_1^{(r)} &= y_0 - R \cos\left(\alpha_1^{(r)}\right), \\ x_2^{(r)} &= x_0 - R \sin\left(\alpha_2^{(r)}\right), & y_2^{(r)} &= y_0 - R \cos\left(\alpha_2^{(r)}\right), \\ x_3^{(r)} &= \frac{a}{\tan \alpha_2^{(r)} - \tan \alpha_1^{(r)}}, & y_3^{(r)} &= \frac{x_3^{(r)}}{2} \left(\tan \alpha_1^{(r)} + \tan \alpha_2^{(r)} \right) \end{aligned}$$

Die Schwerpunkte der Fehlerdreiecke haben also die Koordinaten:

$$\bar{x}_l = \frac{1}{3} \left(x_1^{(l)} + x_2^{(l)} + x_3^{(l)} \right), \quad \bar{y}_l = \frac{1}{3} \left(y_1^{(l)} + y_2^{(l)} + y_3^{(l)} \right)$$

bzw.

$$\bar{x}_r = \frac{1}{3}(x_1^{(r)} + x_2^{(r)} + x_3^{(r)}), \quad \bar{y}_r = \frac{1}{3}(y_1^{(r)} + y_2^{(r)} + y_3^{(r)}).$$

Die exakten Positionen der Berührungspunkte an der Wolkengrenze sind gegeben durch

$$x_l = x_0 + R \cos\left(\arctan \frac{y_3^{(l)} - y_0}{x_3^{(l)} - x_0}\right), \quad y_l = y_0 + R \sin\left(\arctan \frac{y_3^{(l)} - y_0}{x_3^{(l)} - x_0}\right)$$

und

$$x_r = x_0 - R \cos\left(\arctan \frac{y_3^{(r)} - y_0}{x_3^{(r)} - x_0}\right), \quad y_r = y_0 - R \sin\left(\arctan \frac{y_3^{(r)} - y_0}{x_3^{(r)} - x_0}\right),$$

mit den jeweiligen Winkeln

$$\alpha_0^{(l)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{y_3^{(l)} - y_0}{x_3^{(l)} - x_0}, \quad \alpha_0^{(r)} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{y_3^{(r)} - y_0}{x_3^{(r)} - x_0}$$

zum Flugzeugschwerpunkt.

Nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz gelten für den stochastischen Meßfehler des Mittelwertes der drei Punkte des Fehlerdreiecks die Relationen

$$\Delta \bar{x}_l = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta x_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_2^{(l)}}\right)^2 (\Delta x_2^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_3^{(l)}}\right)^2 (\Delta x_3^{(l)})^2}$$

bzw.

$$\Delta \bar{y}_l = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta y_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_2^{(l)}}\right)^2 (\Delta y_2^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_3^{(l)}}\right)^2 (\Delta y_3^{(l)})^2},$$

wobei für den Wolkenabstand eigentlich nur die Komponenten des linken Fehlerdreiecks relevant sind. Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_1^{(l)}} = \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_2^{(l)}} = \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_3^{(l)}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_1^{(l)}} = \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_2^{(l)}} = \frac{\partial \bar{y}_l}{\partial y_3^{(l)}} = \frac{1}{3}$$

ist

$$\Delta \bar{x}_l = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta x_1^{(l)})^2 + (\Delta x_2^{(l)})^2 + (\Delta x_3^{(l)})^2}$$

und

Physikaufgabe 17

$$\Delta \bar{y}_l = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta y_1^{(l)})^2 + (\Delta y_2^{(l)})^2 + (\Delta y_3^{(l)})^2}.$$

Die jeweiligen Tangentenfehler auf der wolkenzugewandten Seite erhalten wir relativ einfach durch Differentiation nach zwei Variablen:

$$\Delta x_1^{(l)} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial x_1^{(l)}}{\partial R}\right)^2 (\Delta R)^2},$$

$$\Delta y_1^{(l)} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_1^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial y_1^{(l)}}{\partial R}\right)^2 (\Delta R)^2},$$

wobei wir angenommen haben, daß der Krümmungsradius R der Wolke eine statistische Meßgröße ist. Mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x_1^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}} = \pm R \cos(\alpha_1^{(l)}), \quad \frac{\partial y_1^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}} = \mp R \sin(\alpha_1^{(l)}),$$

$$\frac{\partial x_1^{(l)}}{\partial R} = \sin(\alpha_1^{(l)}), \quad \frac{\partial y_1^{(l)}}{\partial R} = \cos(\alpha_1^{(l)})$$

berechnen sich die Gaußschen Fehler wie folgt:

$$\Delta x_1^{(l)} = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha_1^{(l)} (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \sin^2 \alpha_1^{(l)} (\Delta R)^2}$$

$$\Delta y_1^{(l)} = \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha_1^{(l)} (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \cos^2 \alpha_1^{(l)} (\Delta R)^2}$$

und

$$\Delta x_2^{(l)} = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha_2^{(l)} (\Delta \alpha_2^{(l)})^2 + \sin^2 \alpha_2^{(l)} (\Delta R)^2}$$

$$\Delta y_2^{(l)} = \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha_2^{(l)} (\Delta \alpha_2^{(l)})^2 + \cos^2 \alpha_2^{(l)} (\Delta R)^2}.$$

Dabei sind $\Delta \alpha_1^{(l)}$ und $\Delta \alpha_2^{(l)}$ die Winkelfehler, die sich von Kamera 1 bzw. 2 aus gesehen ergeben, wenn der Wolkenradius nicht scharf genug bestimmt werden kann, sondern lediglich auf eine kleine Unsicherheit ΔR genau:

$$\Delta \alpha_1^{(l)} = \arcsin \frac{R + \Delta R}{\rho_1} - \arcsin \frac{R}{\rho_1} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \alpha_2^{(l)} = \arcsin \frac{R + \Delta R}{\rho_2} - \arcsin \frac{R}{\rho_2}.$$

Aus Symmetriegründen gilt $\Delta \alpha_1^{(r)} = \Delta \alpha_1^{(l)}$ und $\Delta \alpha_2^{(r)} = \Delta \alpha_2^{(l)}$. Damit erhalten wir für die wolkenabgewandte Seite die Fehler

$$\Delta x_1^{(r)} = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha_1^{(r)} (\Delta \alpha_1^{(r)})^2 + \sin^2 \alpha_1^{(r)} (\Delta R)^2}$$

$$\Delta y_1^{(r)} = \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha_1^{(r)} (\Delta \alpha_1^{(r)})^2 + \cos^2 \alpha_1^{(r)} (\Delta R)^2}$$

bzw.

Physikaufgabe 17

$$\Delta x_2^{(r)} = \sqrt{R^2 \cos^2 \alpha_2^{(r)} (\Delta \alpha_2^{(r)})^2 + \sin^2 \alpha_2^{(r)} (\Delta R)^2}$$

$$\Delta y_2^{(r)} = \sqrt{R^2 \sin^2 \alpha_2^{(r)} (\Delta \alpha_2^{(r)})^2 + \cos^2 \alpha_2^{(r)} (\Delta R)^2}$$

Den Fehler des Schnittpunkts beider Tangenten für das linke Fehlerdreieck berechnen wir gemäß der Definition

$$\Delta x_3^{(l)} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_3^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial x_3^{(l)}}{\partial \alpha_2^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_2^{(l)})^2}$$

mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x_3^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}} = \frac{a}{(\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)})^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha_1^{(l)}}, \quad \frac{\partial x_3^{(l)}}{\partial \alpha_2^{(l)}} = -\frac{a}{(\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)})^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha_2^{(l)}}$$

zu

$$\Delta x_3^{(l)} = \frac{a}{(\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)})^2} \sqrt{\frac{1}{\cos^4 \alpha_1^{(l)}} (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \frac{1}{\cos^4 \alpha_2^{(l)}} (\Delta \alpha_2^{(l)})^2}$$

Der entsprechende Fehler in y -Richtung enthält noch eine dritte Variable:

$$\Delta y_3^{(l)} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial \alpha_2^{(l)}}\right)^2 (\Delta \alpha_2^{(l)})^2 + \left(\frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial x_3^{(l)}}\right)^2 (\Delta x_3^{(l)})^2}$$

welcher Ausdruck mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial \alpha_1^{(l)}} = \frac{x_3^{(l)}}{2} \frac{1}{\cos^2 \alpha_1^{(l)}}, \quad \frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial \alpha_2^{(l)}} = \frac{x_3^{(l)}}{2} \frac{1}{\cos^2 \alpha_2^{(l)}}, \quad \frac{\partial y_3^{(l)}}{\partial x_3^{(l)}} = \frac{1}{2} (\tan \alpha_1^{(l)} + \tan \alpha_2^{(l)})$$

den Fehler

$$\Delta y_3^{(l)} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{1}{\cos^4 \alpha_1^{(l)}} (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \frac{1}{\cos^4 \alpha_2^{(l)}} (\Delta \alpha_2^{(l)})^2\right] (x_3^{(l)})^2 + (\tan \alpha_1^{(l)} + \tan \alpha_2^{(l)})^2 (\Delta x_3^{(l)})^2}$$

besitzt. Mit Hilfe der Umformung

$$\left(\frac{1}{\cos^4 \alpha_1^{(l)}} (\Delta \alpha_1^{(l)})^2 + \frac{1}{\cos^4 \alpha_2^{(l)}} (\Delta \alpha_2^{(l)})^2\right) (x_3^{(l)})^2 = (\Delta x_3^{(l)})^2 (\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)})^2$$

folgt schließlich

$$\Delta y_3^{(l)} = \frac{\Delta x_3^{(l)}}{\sqrt{2}} \sqrt{\tan^2 \alpha_1^{(l)} + \tan^2 \alpha_2^{(l)}}$$

Physikaufgabe 17

Die Fehler des Schwerpunkts des Fehlerdreiecks für die wolkenabgewandte Seite ergeben sich analog:

$$\Delta x_3^{(r)} = \frac{a}{(\tan \alpha_2^{(r)} - \tan \alpha_1^{(r)})^2} \sqrt{\frac{1}{\cos^4 \alpha_1^{(r)}} (\Delta \alpha_1^{(r)})^2 + \frac{1}{\cos^4 \alpha_2^{(r)}} (\Delta \alpha_2^{(r)})^2},$$

$$\Delta y_3^{(r)} = \frac{\Delta x_3^{(r)}}{\sqrt{2}} \sqrt{\tan^2 \alpha_1^{(r)} + \tan^2 \alpha_2^{(r)}}.$$

Um die Plausibilität unserer Berechnung zu erhärten, können wir folgende Näherung anwenden:

$$\alpha_2^{(l)} - \alpha_1^{(l)} = \delta_2 - \delta_1 + \arcsin \left(\frac{R}{\rho_2} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho_1} \right)^2} - \frac{R}{\rho_1} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho_2} \right)^2} \right)$$

$$\approx \delta_2 - \delta_1 + \arcsin \left(\frac{R(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{\rho_1 \rho_2} \right) \right),$$

wobei wir den Arkustangens wegen der Kleinheit des Winkels durch sein Argument ersetzen dürfen:

$$\delta_2 - \delta_1 = \arctan \left[\frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{d + R} \left(1 + \left(\frac{a \sin \varphi}{2(d + R)} \right)^2 \right)^{-1} \right] \approx \frac{a \sin 2\varphi}{2(d + R)}.$$

Insgesamt resultiert der einfache Ausdruck

$$\alpha_2^{(l)} - \alpha_1^{(l)} \approx \frac{a \sin 2\varphi}{2(d + R)} + \frac{R(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 \rho_2},$$

den wir in die folgende trigonometrische Beziehung einsetzen:

$$\tan \alpha_2^{(l)} - \tan \alpha_1^{(l)} = \frac{\sin(\alpha_2^{(l)} - \alpha_1^{(l)})}{\cos \alpha_2^{(l)} \cos \alpha_1^{(l)}} \approx \frac{1}{\cos \alpha_2^{(l)} \cos \alpha_1^{(l)}} \sin \left(\frac{a \sin 2\varphi}{2(d + R)} \right).$$

Auch der Winkelfehler läßt sich für große Wolkenentfernungen weiter vereinfachen:

$$\Delta \alpha_1^{(l)} = \arcsin \left(\frac{R + \Delta R}{\rho_1} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\rho_1} \right)^2} - \frac{R}{\rho_1} \sqrt{1 - \left(\frac{R + \Delta R}{\rho_1} \right)^2} \right)$$

$$\approx \arcsin \left[\frac{\Delta R}{\rho_1} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\rho_1} \right)^2 \right) \right] \approx \frac{\Delta R}{\rho_1}.$$

Mit Approximation des Sinus durch sein Argument und mit den weiteren Substitutionen

$$\delta_1 \approx \delta_2 \approx -\varphi, \quad \rho_1 \approx \rho_2 \approx (d + R) \sqrt{1 + \cot^2 \varphi}, \quad \alpha_1^{(l)} \approx \alpha_2^{(l)}$$

Physikaufgabe 17

erhalten wir in guter Näherung den Ausdruck

$$\Delta x_3^{(l)} \approx \frac{\sqrt{2}\rho_1\Delta R}{a\cos^2\varphi} \cos^2\left(\arcsin\left[\frac{R}{d+R}\sin\varphi\right] - \varphi\right).$$

Der Fehler des Schnittpunktes wird also klein für möglichst großen Kameraabstand, möglichst geringe Entfernung zu Wolken, möglichst kleinen seitlichen Blickwinkel und möglichst geringe Wolkenkrümmungsradien. Ferner ist für die Messung um so genauer, je schärfer sich die Wolken vom Hintergrund absetzen.

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Größen ergibt sich folgender Wolkenschwerpunkt mit den zugehörigen Entfernungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1306,2 \text{ m} & y_0 &= -350 \text{ m} \\ \rho_1 &= 1361,8 \text{ m} & \rho_2 &= 1343,7 \text{ m} \end{aligned}$$

Die Rechenergebnisse mit Fehlerabschätzung sind in nachfolgender Tabelle zusammengefaßt:

$\delta_1 = -16,4^\circ$	$\alpha_0^{(l)} = -12,9^\circ$	$\delta_2 = -13,6^\circ$	$\alpha_0^{(r)} = -17,1^\circ$
$\alpha_1^{(l)} = -14,3^\circ$	$\alpha_2^{(l)} = -11,4^\circ$	$\alpha_1^{(r)} = -18,5^\circ$	$\alpha_2^{(r)} = -15,7^\circ$
$\Delta\alpha_1^{(l)} = 0,735 \text{ mrad}$	$\Delta\alpha_2^{(l)} = 0,745 \text{ mrad}$	$\Delta\alpha_1^{(r)} = 0,735 \text{ mrad}$	$\Delta\alpha_2^{(r)} = 0,745 \text{ mrad}$
$x_1^{(l)} = 1318,6 \text{ m}$	$y_1^{(l)} = -301,55 \text{ m}$	$x_1^{(r)} = 1290,3 \text{ m}$	$y_1^{(r)} = -397,41 \text{ m}$
$x_2^{(l)} = 1316,1 \text{ m}$	$y_2^{(l)} = -300,99 \text{ m}$	$x_2^{(r)} = 1292,7 \text{ m}$	$y_2^{(r)} = -398,14 \text{ m}$
$x_3^{(l)} = 1317,4 \text{ m}$	$y_3^{(l)} = -301,24 \text{ m}$	$x_3^{(r)} = 1291,5 \text{ m}$	$y_3^{(r)} = -397,80 \text{ m}$
$\Delta x_1^{(l)} = 0,25 \text{ m}$	$\Delta y_1^{(l)} = 0,97 \text{ m}$	$\Delta x_1^{(r)} = 0,32 \text{ m}$	$\Delta y_1^{(r)} = 0,95 \text{ m}$
$\Delta x_2^{(l)} = 0,20 \text{ m}$	$\Delta y_2^{(l)} = 0,98 \text{ m}$	$\Delta x_2^{(r)} = 0,27 \text{ m}$	$\Delta y_2^{(r)} = 0,96 \text{ m}$
$\Delta x_3^{(l)} = 27,3 \text{ m}$	$\Delta y_3^{(l)} = 6,29 \text{ m}$	$\Delta x_3^{(r)} = 27,3 \text{ m}$	$\Delta y_3^{(r)} = 8,45 \text{ m}$
$\bar{x}_l = 1317,4 \text{ m}$	$\bar{y}_l = -301,26 \text{ m}$	$\bar{x}_r = 1291,5 \text{ m}$	$\bar{y}_r = -397,78 \text{ m}$
$x_l = 1317,4 \text{ m}$	$y_l = -301,26 \text{ m}$	$x_r = 1291,5 \text{ m}$	$y_r = -397,79 \text{ m}$
$\Delta\bar{x}_l = 9,10 \text{ m}$	$\Delta\bar{y}_l = 2,15 \text{ m}$	$\Delta\bar{x}_r = 9,11 \text{ m}$	$\Delta\bar{y}_r = 2,85 \text{ m}$

Tabelle 1. Rechenergebnisse gemäß beigefügtem Programm

Die gemessenen Schwerpunkte der Fehlerdreiecke stimmen sehr gut mit den exakten Werten für die Wolkenränder überein. Auch wenn der Fehler des Schwerpunkts, vor allem wegen der großen Schwankung in x -Richtung, zunächst sehr groß erscheint, so liegt er dennoch im Prozentbereich, was für Bestimmung der Wolkenentfernung in der Luftfahrt vollkommen ausreichend ist. Die genaue Entfernung leitet sich im wesentlichen aus dem Kosinussatz der Dreiecksberechnung ab, wonach alle Kantenlängen eines Dreiecks eindeutig bestimmt sind, wenn nur die Länge einer Seite und zwei Winkel bekannt sind. Die Basislänge des Dreiecks ist hier der Abstand a der beiden Kameras, der zwar mit einem systematischen Fehler behaftet ist, jedoch mit keinem statistischen.

Physikaufgabe 17

Anhang

```
% Wolkenmeßgenauigkeit

% Abstand zur Wolke in m
d = 300;

% Wolkenradius in m
R = 50;

% Meßfehler Wolkenradius in m
Delta_R = 1;

% Objektwinkel relativ zur Flugzeuglängsachse in °
phi = 15;

% Konvertierung in rad
phi = phi/180*pi;

% Flügelspannweite in m
a = 70;

% Wolkenschwerpunkt in m
x0 = (d+R)*cot(phi)
y0 = -(d+R)

% Azimutwinkel des Wolkenschwerpunkts in rad
delta1 = -atan((d+R+a/2)/x0);
delta_1 = delta1/pi*180
delta2 = -atan((d+R-a/2)/x0);
delta_2 = delta2/pi*180

% Abstand zum Wolkenschwerpunkt
rho1 = sqrt((d+R)^2*(cot(phi))^2+(d+R+a/2)^2)
rho2 = sqrt((d+R)^2*(cot(phi))^2+(d+R-a/2)^2)

% Linker Begrenzungswinkel von der 1. Kamera aus gesehen
alpha1_l = delta1 + asin(R/rho1);
alpha_1_l = alpha1_l/pi*180

% Linker Begrenzungswinkel von der 2. Kamera aus gesehen
alpha2_l = delta2 + asin(R/rho2);
alpha_2_l = alpha2_l/pi*180

% Rechter Begrenzungswinkel von der 1. Kamera aus gesehen
alpha1_r = delta1 - asin(R/rho1);
alpha_1_r = alpha1_r/pi*180

% Rechter Begrenzungswinkel von der 2. Kamera aus gesehen
alpha2_r = delta2 - asin(R/rho2);
alpha_2_r = alpha2_r/pi*180

% Koordinaten der Eckpunkte des linken Fehlerdreiecks
x1_l = x0 + R*sin(abs(alpha1_l))
y1_l = y0 + R*cos(abs(alpha1_l))
x2_l = x0 + R*sin(abs(alpha2_l))
y2_l = y0 + R*cos(abs(alpha2_l))
x3_l = a/(tan(alpha2_l) - tan(alpha1_l))
```

Physikaufgabe 17

```
y3_l = x3_l/2*(tan(alpha1_l) + tan(alpha2_l))

% Koordinaten der Eckpunkte des rechten Fehlerdreiecks
x1_r = x0 - R*sin(abs(alpha1_r))
y1_r = y0 - R*cos(abs(alpha1_r))
x2_r = x0 - R*sin(abs(alpha2_r))
y2_r = y0 - R*cos(abs(alpha2_r))
x3_r = a/(tan(alpha2_r) - tan(alpha1_r))
y3_r = x3_r/2*(tan(alpha1_r) + tan(alpha2_r))

% Schwerpunkt des linken Fehlerdreiecks
xmean_l = 1/3*(x1_l + x2_l + x3_l)
ymean_l = 1/3*(y1_l + y2_l + y3_l)

% Schwerpunkt des rechten Fehlerdreiecks
xmean_r = 1/3*(x1_r + x2_r + x3_r)
ymean_r = 1/3*(y1_r + y2_r + y3_r)

% Exakte Koordinaten der linken Wolkenkante
beta_l = atan((y3_l - y0)/(x3_l - x0));
alpha0_l = -(pi/2-beta_l);
alpha_0_l = alpha0_l/pi*180
x_l = x0 + R*cos(beta_l)
y_l = y0 + R*sin(beta_l)

% Exakte Koordinaten der rechten Wolkenkante
beta_r = atan((y3_r - y0)/(x3_r - x0));
alpha0_r = -(pi/2 - beta_r);
alpha_0_r = alpha0_r/pi*180
x_r = x0 - R*cos(beta_r)
y_r = y0 - R*sin(beta_r)

% Fehlerrechnung

% Linke Winkelmeßfehler in rad
Delta_alpha1_l = asin((R+Delta_R)/rho1) - asin(R/rho1)
D_alpha1_l = Delta_alpha1_l/pi*180;
Delta_alpha2_l = asin((R+Delta_R)/rho2) - asin(R/rho2)
D_alpha2_l = Delta_alpha2_l/pi*180;

% Rechte Winkelmeßfehler in rad
Delta_alpha1_r = Delta_alpha1_l
D_alpha1_r = Delta_alpha1_r/pi*180;
Delta_alpha2_r = Delta_alpha2_l
D_alpha2_r = Delta_alpha2_r/pi*180;

% Fehler des ersten linken Tangentenschnittpunkts
Delta_x1_l = sqrt(R^2*cos(alpha1_l)^2*Delta_alpha1_l^2 + sin(alpha1_l)^2*Delta_R^2)
Delta_y1_l = sqrt(R^2*sin(alpha1_l)^2*Delta_alpha1_l^2 + cos(alpha1_l)^2*Delta_R^2)

% Fehler des zweiten linken Tangentenschnittpunkts
Delta_x2_l = sqrt(R^2*cos(alpha2_l)^2*Delta_alpha2_l^2 + sin(alpha2_l)^2*Delta_R^2)
Delta_y2_l = sqrt(R^2*sin(alpha2_l)^2*Delta_alpha2_l^2 + cos(alpha2_l)^2*Delta_R^2)

% Fehler des linken Tangentenschnittpunkts
```

Physikaufgabe 17

```
Delta_x3_l = a/(tan(alpha2_l) -  
tan(alpha1_l))^2*sqrt(1/cos(alpha1_l)^4*Delta_alpha1_l^2+1/cos(alpha2_l)^4*  
Delta_alpha2_l^2)  
Delta_y3_l = Delta_x3_l/sqrt(2)*sqrt(tan(alpha1_l)^2 + tan(alpha2_l)^2)  
  
% Fehler des ersten rechten Tangentenschnittpunkts  
Delta_x1_r = sqrt(R^2*cos(alpha1_r)^2*Delta_alpha1_r^2 + sin(al-  
pha1_r)^2*Delta_R^2)  
Delta_y1_r = sqrt(R^2*sin(alpha1_r)^2*Delta_alpha1_r^2 +  
cos(alpha1_r)^2*Delta_R^2)  
  
% Fehler des zweiten rechten Tangentenschnittpunkts  
Delta_x2_r = sqrt(R^2*cos(alpha2_r)^2*Delta_alpha2_r^2 + sin(al-  
pha2_r)^2*Delta_R^2)  
Delta_y2_r = sqrt(R^2*sin(alpha2_r)^2*Delta_alpha2_r^2 +  
cos(alpha2_r)^2*Delta_R^2)  
  
% Fehler des rechten Tangentenschnittpunkts  
Delta_x3_r = a/(tan(alpha2_r) -  
tan(alpha1_r))^2*sqrt(1/cos(alpha1_r)^4*Delta_alpha1_r^2+1/cos(alpha2_r)^4*  
Delta_alpha2_r^2)  
Delta_y3_r = Delta_x3_r/sqrt(2)*sqrt(tan(alpha1_r)^2 + tan(alpha2_r)^2)  
  
% Fehler des linken Fehlerdreiecks in x-Richtung  
Delta_x_l = 1/3*sqrt(Delta_x1_l^2 + Delta_x2_l^2 + Delta_x3_l^2)  
  
% Fehler des linken Fehlerdreiecks in y-Richtung  
Delta_y_l = 1/3*sqrt(Delta_y1_l^2 + Delta_y2_l^2 + Delta_y3_l^2)  
  
% Fehler des rechten Fehlerdreiecks in x-Richtung  
Delta_x_r = 1/3*sqrt(Delta_x1_r^2 + Delta_x2_r^2 + Delta_x3_r^2)  
  
% Fehler des rechten Fehlerdreiecks in y-Richtung  
Delta_y_r = 1/3*sqrt(Delta_y1_r^2 + Delta_y2_r^2 + Delta_y3_r^2)
```