Aufgabe: Zeigen Sie anhand der Impuls- und Schwerpunkterhaltung im All, daß die Gravitation eine Austauschwechselwirkung ist.

Lösung: Seien $|\mathbf{p}_1\rangle$ und $|\mathbf{p}_2\rangle$ Eigenzustände des Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}}$ mit der Eigenschaft

$$\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}_1\rangle = \mathbf{p}_1|\mathbf{p}_1\rangle \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}_2\rangle = \mathbf{p}_2|\mathbf{p}_2\rangle.$$

Dann ist

$$\hat{\mathbf{p}}^2|\mathbf{p}_1\rangle|\mathbf{p}_2\rangle = \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2|\mathbf{p}_1\rangle|\mathbf{p}_2\rangle = p_1 p_2|\mathbf{p}_1\rangle|\mathbf{p}_2\rangle.$$

Mit der Wellenfunktion der Austauschwechselwirkung

$$\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)+\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)+\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)\right)$$

folgt aus der Operatorgleichung

$$\left(c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2\right)|\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\rangle = p_1 p_2|\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\rangle$$

der Erwartungswert

$$\begin{aligned}\left\langle c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle &= 1/2\cdot\left\langle\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)+\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\right|\left(c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2\right)\left|\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)+\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\right\rangle\\ &= 1/2\cdot\left\langle\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)+\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\right| p_1p_2\left|\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)+\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\right\rangle\\ &= 1/2\cdot p_1p_2\left(\langle\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)|\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)\rangle+\langle\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)|\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\rangle\right.\\ &\quad\left.+\langle\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)|\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\rangle+\langle\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)|\Phi(\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_1)\rangle\right).\end{aligned}$$

Mit den Wellenfunktionen ϕ_A und ϕ_B der sich anziehenden Teilchen,

$$\Phi(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)+\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)\right),$$

erhalten wir den gemischten Ausdruck

$$\begin{aligned}\left\langle c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle &= 1/2\cdot p_1p_2\left(\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle\right.\\ &\quad+\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle\\ &\quad+\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle\\ &\quad\left.+\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle\right),\end{aligned}$$

den wir auf Produktform bringen:

$$\left\langle c^{-2}\hat{E}^2-\hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle = 1/2\cdot p_1p_2\Big(\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\rangle\langle\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle$$
$$+\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\rangle\langle\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle$$
$$+\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\rangle\langle\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle$$
$$+\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\rangle\langle\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle\Big).$$

Mit den Impulswellenfunktionen

$$\phi_A(\mathbf{p}_1)=A(\mathbf{p}_1)e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1},\quad \bar{\phi}_A(\mathbf{p}_1)=\bar{A}(\mathbf{p}_1)e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1},$$
$$\phi_A(\mathbf{p}_2)=A(\mathbf{p}_2)e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_1},\quad \bar{\phi}_A(\mathbf{p}_2)=\bar{A}(\mathbf{p}_2)e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_1}$$

bzw.

$$\phi_B(\mathbf{p}_1)=B(\mathbf{p}_1)e^{i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_2},\quad \bar{\phi}_B(\mathbf{p}_1)=\bar{B}(\mathbf{p}_1)e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_2},$$
$$\phi_B(\mathbf{p}_2)=B(\mathbf{p}_2)e^{i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2},\quad \bar{\phi}_B(\mathbf{p}_2)=\bar{B}(\mathbf{p}_2)e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2}$$

lauten die homogenen Skalarprodukte

$$\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\rangle=\int\bar{\phi}_A(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_1)\,d^4p_1=\int|\phi_A(\mathbf{p}_1)|^2\,d^4p_1=1,$$
$$\langle\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle=\int\bar{\phi}_B(\mathbf{p}_2)\phi_B(\mathbf{p}_2)\,d^4p_2=\int|\phi_B(\mathbf{p}_2)|^2\,d^4p_2=1,$$
$$\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\rangle=\int\bar{\phi}_B(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_1)\,d^4p_1=\int|\phi_B(\mathbf{p}_1)|^2\,d^4p_1=1,$$
$$\langle\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle=\int\bar{\phi}_A(\mathbf{p}_2)\phi_A(\mathbf{p}_2)\,d^4p_1=\int|\phi_A(\mathbf{p}_2)|^2\,d^4p_2=1,$$

und die heterogenen sind gegeben durch

$$\langle\phi_A(\mathbf{p}_1)|\phi_B(\mathbf{p}_1)\rangle=\int\bar{\phi}_A(\mathbf{p}_1)\phi_B(\mathbf{p}_1)\,d^4p_1=\int\bar{A}(\mathbf{p}_1)B(\mathbf{p}_1)e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}d^4p_1,$$
$$\langle\phi_B(\mathbf{p}_2)|\phi_A(\mathbf{p}_2)\rangle=\int\bar{\phi}_B(\mathbf{p}_2)\phi_A(\mathbf{p}_2)\,d^4p_2=\int\bar{B}(\mathbf{p}_2)A(\mathbf{p}_2)e^{i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}d^4p_2,$$
$$\langle\phi_B(\mathbf{p}_1)|\phi_A(\mathbf{p}_1)\rangle=\int\bar{\phi}_B(\mathbf{p}_1)\phi_A(\mathbf{p}_1)\,d^4p_1=\int\bar{B}(\mathbf{p}_1)A(\mathbf{p}_1)e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}d^4p_1,$$
$$\langle\phi_A(\mathbf{p}_2)|\phi_B(\mathbf{p}_2)\rangle=\int\bar{\phi}_A(\mathbf{p}_2)\phi_B(\mathbf{p}_2)\,d^4p_2=\int\bar{A}(\mathbf{p}_2)B(\mathbf{p}_2)e^{-i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}d^4p_2.$$

Aus Symmetriegründen müssen die folgenden Amplitudenprodukte gleich sein:

$$\bar{A}(\mathbf{p}_1)B(\mathbf{p}_1)=A(\mathbf{p}_2)\bar{B}(\mathbf{p}_2),$$
$$A(\mathbf{p}_1)\bar{B}(\mathbf{p}_1)=\bar{A}(\mathbf{p}_2)B(\mathbf{p}_2).$$

Da diese konstanten Terme nicht mehr zum Integranden gehören, können sie vor das Integralzeichen gezogen werden. Es ergeben sich somit die Ausdrücke

$$\left\langle \phi_A(\mathbf{p}_1) \middle| \phi_B(\mathbf{p}_1) \right\rangle = \bar{B}(\mathbf{p}_2) A(\mathbf{p}_2) \int e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} d^4 p_1 = -\frac{m_2 G}{c^2} \frac{e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|},$$

$$\left\langle \phi_B(\mathbf{p}_2) \middle| \phi_A(\mathbf{p}_2) \right\rangle = \bar{A}(\mathbf{p}_1) B(\mathbf{p}_1) \int e^{i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} d^4 p_2 = \frac{m_1 G}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|},$$

$$\left\langle \phi_B(\mathbf{p}_1) \middle| \phi_A(\mathbf{p}_1) \right\rangle = \bar{A}(\mathbf{p}_2) B(\mathbf{p}_2) \int e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} d^4 p_1 = \frac{m_2 G}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|},$$

$$\left\langle \phi_A(\mathbf{p}_2) \middle| \phi_B(\mathbf{p}_2) \right\rangle = \bar{B}(\mathbf{p}_1) A(\mathbf{p}_1) \int e^{-i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} d^4 p_2 = -\frac{m_1 G}{c^2} \frac{e^{-i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|}.$$

Multiplizieren wir die entsprechenden Skalarprodukte miteinander, erhalten wir den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\left\langle c^{-2}\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle = \frac{1}{2} p_1 p_2 \Bigg(1 &- \frac{m_2 G}{c^2} \frac{e^{-i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|} \frac{m_1 G}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|} \\ &- \frac{m_2 G}{c^2} \frac{e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|} \frac{m_1 G}{c^2} \frac{e^{-i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{i\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|} + 1 \Bigg) \\ = p_1 p_2 \Bigg(1 &+ \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 G^2}{c^4} \frac{e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} + e^{-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|^2} \Bigg).\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ergibt sich folgender einfacher Ausdruck:

$$\left\langle \hat{E}^2 - \hat{\mathbf{p}}^2 c^2 \right\rangle = p_1 p_2 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 G^2}{c^4} \frac{e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} + e^{-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|^2} \right).$$

Formen wir dieses Ergebnis um, entspricht der Wechselwirkungsterm genau der potentiellen Energie, die in Einsteins Masse-Energie-Äquivalenz nicht explizit vorkommt,

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 - \frac{p_1 p_2 c^2}{2c^4} \frac{m_1 m_2 G^2}{\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|^2} \left(e^{i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} + e^{-i(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} \right) = p_1 p_2 c^2$$

Diese Gleichung läßt sich mit Hilfe der Relationen

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) &= -(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2), \\ (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) &= -(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\end{aligned}$$

weiter vereinfachen. Addieren wir nämlich diese beiden Gleichungen, folgt

$$2(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) = (\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2) - (\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)\cdot(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2).$$

Aufgrund der Impulserhaltung $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ und der Schwerpunkterhaltung im reziproken Raum $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 0$ ist

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = 0.$$

Damit folgt die Masse-Energie-Äquivalenz eines kosmischen Zweiteilchensystems einschließlich Austauschwechselwirkung

$$E = \sqrt{m_1 m_2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 + G^2 \frac{m_1^2 m_2^2}{\left|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right|^2}}.$$

Für $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ wird der Austauschterm unendlich, mit wachsender Ausdehnung des Alls verschwindet er, genauer gesagt, die komplexe Ortsdifferenz $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = i(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ kann aufgrund der Gleichzeitigkeit $t_1 = t_2$ nicht größer werden als der Ereignishorizont,

$$\left|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right| \le R_S.$$

Letzterer ist für ein maximal rotierendes Schwarzes Loch gegeben durch

$$R_S = \frac{Gm_1}{c^2} = \frac{Gm_2}{c^2}.$$

Daraus folgt, daß das Weltall bei maximaler Ausdehnung nur noch kinetische Energie besitzt,

$$E = \sqrt{m_1 m_2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 - m_1 m_2 \frac{Gm_1}{R_S} \frac{Gm_2}{R_S}} = \mathbf{p}c,$$

und die Ruheenergie komplett verschwunden ist. Damit verliert sich auch die Austauschwechselwirkung, d.h. die Massen ziehen sich nicht mehr an. Das Weltall kann sich also nur deshalb immer weiter ausdehnen, weil seine potentielle Energie mit wachsender Ausdehnung allmählich verlorengeht.

Ist das All noch nicht in Bewegung $(\mathbf{p} = 0),$ also unmittelbar nach dem Urknall, und sind die Massen sehr unterschiedlich, d.h. $M = m_1$ und $m = m_2,$ sind auch die Schwarzschildradien unterschiedlich, etwa $R_S^{(1)} = R_S$ und $R_S^{(2)} = r_S$, und die Energie ist trotz vorhandener Ruheenergie gleich null:

$$E = \sqrt{m_1 m_2 c^4 - m_1 m_2 \frac{Gm_1}{R_S} \frac{Gm_2}{R_S}} = \sqrt{mMc^4 - mM \frac{Gm}{r_S} \frac{GM}{R_S}} = 0.$$

Das Weltall besitzt also keine Energie, weil die Ruheenergie gleich der potentiellen Energie ist. Doch wohin ist die Ruheenergie abgewandert? Da die Energie erhalten bleibt, muß die Ruheenergie komplett in den reziproken Raum abgewandert sein, d.h. sie wurde in die Ausdehnung des Raums investiert. Obige Gleichung ist nämlich auch erfüllt, wenn $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 0,$ d.h.

wenn das All eine Singularität ist. Daher ist die Ruheenergie die konstante Erhaltungsgröße, und nicht die Energie. In einer Singularität stellt sich die Frage einer Fernwirkung nämlich nicht, und die Spezielle Relativitätstheorie wäre wie die Quantentheorie nichtlokal, weil es im lichtartigen Kosmos keine Entfernungen gibt. Jedes Ereignis kann jedes andere beeinflussen.

