Aufgabe: Zeigen Sie, daß eine als atomar bestückter Marschflugkörper eingesetzte Hyperschallrakete vom Typ Kinschal von Iron-Dome-Abwehrraketen nicht abgefangen werden kann.

Beweis: Eine typische Anordnung einer Raketenabwehr ist in Abb. 1 skizziert. Dabei ist E der Erdmittelpunkt und R der Erdradius. Ein angreifender Marschflugkörper befinde sich im Punkt B, wo er aufgrund der Erdkrümmung erstmalig entdeckt werden kann.[1] Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß sich der Marschflugkörper in der Höhe h über der Erdoberfläche befindet und diese im Punkt C oberhalb der Abwehrstellung im Punkt A passiert.

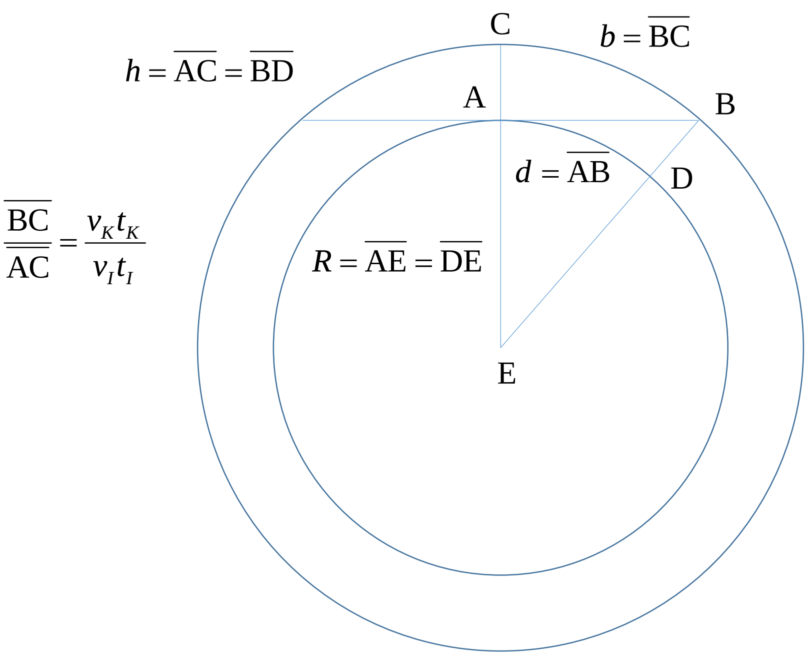

Abbildung 1. Geometrie einer Raketenstellung zur Abwehr von Marschflugkörpern

Die Abwehrstellung sei so ausgelegt, daß sie den Marschflugkörper genau dann erfolgreich bekämpft, wenn dieser den Zenit über dem Punkt A erreicht. Bis zum Punkt C benötigt der Marschflugkörper die Zeit $t_K = b/v_K$, wobei b die Bogenlänge in der Höhe h ist und v_K die Marschgeschwindigkeit der Kinschal. Die Abwehrrakete von Iron Dome benötigt für den Aufstieg zum Zenit die Zeit t_I und habe ihrerseits die Marschgeschwindigkeit v_I, wobei $t_I = h/v_I$. Die Trefferbedingung im Punkt C lautet demnach: $t_W + t_I = t_K$ mit der Wartezeit

$$t_W = t_K - t_I = \frac{b}{v_K} - \frac{h}{v_I},$$

da die Abwehrrakete ansonsten über den Kollisionspunkt hinausgeflogen wäre, wenn sie gleichzeitig mit dem Auftauchen der Kinschal abgefeuert wird. Das Bogensegment b ist gegeben durch

[1] Auf See bezeichnet man das erste sichtbare Auftauchen eines Schiffs hinter dem Horizont als Feuer in der Kimm.

$$b = \overline{\mathrm{BC}} = (R+h)\arctan\frac{d}{R},$$

und die Flughöhe h der Kinschal muß aus der Entdeckungsreichweite d mit Hilfe des Satzes des Pythagoras

$$R^2 + d^2 = (R+h)^2 = R^2 + 2hR + h^2$$

bzw. $d = \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2hR + h^2}$ aus der quadratischen Gleichung

$$h^2 + 2Rh - d^2 = 0$$

ermittelt werden, welche die Lösungen

$$h = -R \pm \sqrt{R^2 + d^2} \approx \pm R\sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} - R \approx \pm R\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right) - R$$

besitzt. Mit dem positiven Vorzeichen folgt

$$h \approx \frac{d^2}{2R}.$$

Damit ergibt sich das Bogensegment näherungsweise zu

$$b = R\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right)\arctan\frac{d}{R} \approx d\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right),$$

und die Wartezeit beträgt

$$t_W = \frac{d}{v_K}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right) - \frac{1}{v_I}\frac{d^2}{2R} = \frac{d}{v_K}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_K}{v_I}\frac{d}{R} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2}\right).$$

Tabelle 1 zeigt als Funktion abnehmender Flughöhe, wieviel Zeit für die Ortung des Marschflugkörpers verbleibt. Während man bei einer Höhe von 2000 m noch 35,88 Sekunden Zeit hat, um Abwehrmaßnahmen einzuleiten, verbleiben bei einer Flughöhe von 100 m nur mehr 8,52 Sekunden. Da die Flugzeiten der Abfangraketen immer kürzer werden, je tiefer der Marschflugkörper fliegt, ist das Fehlerintervall größer als die eigentliche Flugzeit. Zudem werden die Radialgeschwindigkeiten mit abnehmender Höhe immer größer, so daß die Nachführregler der Abwehrraketen dieser Beschleunigung nicht mehr folgen können.

Die derzeit größte Hyperschallgeschwindigkeit erreicht der indische Marschflugkörper BrahMos II, der nach bislang unbestätigten Angaben Mach 7 erreichen soll. Der mit Atomsprengköpfen bestückbare chinesische Marschflugkörper DongHai 10 besitzt eine Reichweite von 2000 km. Semiballistische Mittelstreckenraketen wie die russische Kinschal mit einer Reichweite von 1800 km und einer Hyperschallgeschwindigkeit von über Mach 12 können von Iron Dome nur direkt über dem Zielgebiet bekämpft werden. Die radioaktiven Trümmer gehen dann allerdings über dem eigenen Gebiet nieder. Dennoch ist die Abwehrphilosophie die gleiche wie bei Marschflugkörpern. Je tiefer eine MiG-31K fliegt, desto später kann sie von den Abwehrradaren erfaßt werden. Bei nur 500 m Flughöhe käme sie bis auf 80 km an die feindliche Raketenabwehr heran, ohne geortet werden zu können. Da die Flugbahnen der Kinschal bis in Höhen von 18-20 km reichen, wären Abfangraketen mit Mach 2 wie die des Iron Dome ersichtlich zu langsam, so daß die Kinschal über die feindliche Raketenabwehr hinwegflöge und Ziele im Hinterland immer noch erreichen könnte. Zudem weiß niemand, wo diese Raketen dann niedergehen werden, so daß sie den Gegner völlig unvorbereitet treffen würden. Eine flächendeckende Raketenabwehr, die in ständiger Alarmbereitschaft wäre, müßte sich demnach auch auf das Hinterland erstrecken. Vielversprechender als Iron Dome ist das in der Stratosphäre einsetzbare antiballistische System Arrow, das zum Abfangen von Lang- und Mittelstreckenraketen gedacht ist. Dieses System kann nur durch bodennahe Marschflugkörper mit Hyperschallgeschwindigkeit unterlaufen werden.

$h\,[\mathrm{m}]$	$d\,[\mathrm{km}]$	$b\,[\mathrm{km}]$	$t_K\,[\mathrm{s}]$	$t_I\,[\mathrm{s}]$	$t_W\,[\mathrm{s}]$
100	35,70	35,70	8,67	0,15	8,52
500	79,82	79,82	19,39	0,73	18,67
1000	112,88	112,89	27,43	1,46	25,97
1500	138,26	138,27	33,59	2,19	31,41
2000	159,65	159,67	38,79	2,92	35,88

Tabelle 1. Übersicht über die Zusammenhänge von Flughöhe, Entdeckungsreichweite, Flugstrecke und Wartezeit

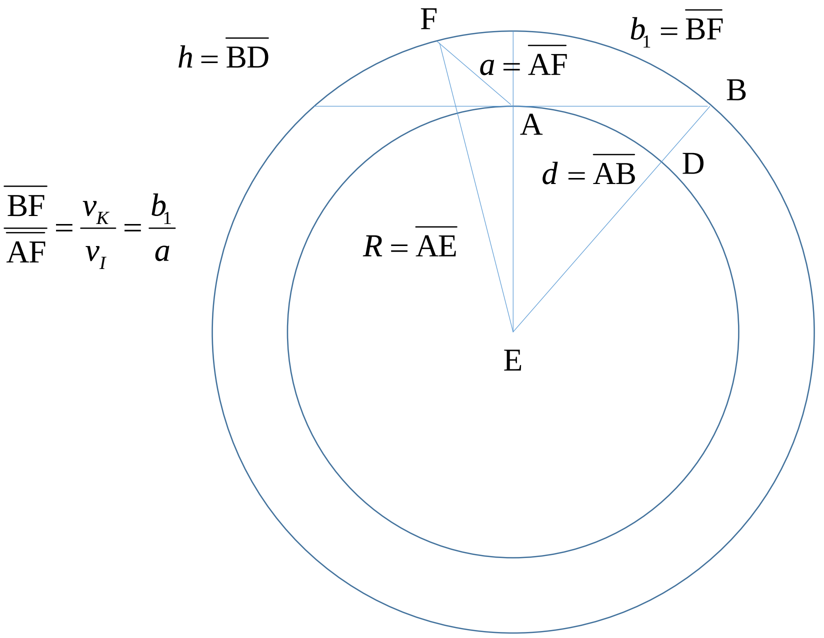

Abbildung 2. Der rückseitige Fall einer Raketenabwehr im Punkt F ohne Wartezeit

In Abb. 2 treffen sich Abwehrrakete und Marschflugkörper im Abstand a im Punkt F zur spätestmöglichen Zeit, wobei der Marschflugkörper nicht den Weg b zurücklegt, sondern den längeren Weg b_1. Der Abschuß findet im Hinterland statt. Die Trefferbedingung im Punkt F lautet $t_I = t_K$, da die Abfangrakete ohne Wartezeit sofort abgeschossen wird, so daß

$$t_W = t_K - t_I = \frac{b}{v_K} - \frac{h}{v_I} = 0.$$

Entsprechend wird der Weg des Marschflugkörpers um die Strecke

$$b_1 - b = \frac{v_K}{v_I} a - (R+h) \arctan \frac{d}{R}$$

länger, da man ihm hinterherschießen muß. Den Abstand a erhalten wir aus dem Kosinussatz des allgemeinen Dreiecks,

$$a^2 = R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\frac{b_1 - b}{R+h}.$$

Setzen wir die obige Gleichung in den Kosinussatz ein, erhalten wir in der Näherung für kurze Entfernungen $d \ll R$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\left(\frac{v_K}{v_I}\frac{a}{R+h} - \arctan\frac{d}{R}\right) \\ &\approx R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\left(\frac{v_K}{v_I}\frac{a}{R+h} - \frac{d}{R}\right). \end{aligned}$$

Da der Winkel im Kosinus ebenfalls klein ist, können wir wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} a^2 &\approx R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_K}{v_I}\frac{a}{R+h} - \frac{d}{R}\right)^2\right) \\ &= 2R^2 + 2Rh + h^2 - 2R(R+h) + R(R+h)\left(\frac{v_K}{v_I}\frac{a}{R+h} - \frac{d}{R}\right)^2 \\ &\approx h^2 + R(R+h)\left(\frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{a^2}{(R+h)^2} - \frac{d}{R}\frac{v_K}{v_I}\frac{2a}{R+h} + \frac{d^2}{R^2}\right) \\ &= h^2 + \frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{R}{R+h}a^2 - 2\frac{v_K}{v_I}ad + (R+h)\frac{d^2}{R}. \end{aligned}$$

Nach Umformung erhalten wir eine quadratische Gleichung,

$$\left(\frac{v_K^2}{v_I^2} - 1 - \frac{h}{R}\right)\frac{1}{1+\frac{h}{R}}a^2 - 2d\frac{v_K}{v_I}a + h^2 + \left(1 + \frac{h}{R}\right)d^2 = 0,$$

die wir durch binomische Näherung unter Vernachlässigung von Glieder zweiter Ordnung auf folgende Form bringen können:

$$\left[\frac{v_K^2}{v_I^2}-1-\frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{h}{R}\right]a^2-2d\frac{v_K}{v_I}a+h^2+\left(1+\frac{h}{R}\right)d^2=0.$$

Eliminieren wir die Flughöhe h mittels

$$\frac{h}{R}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{R^2},$$

folgt

$$\left[\frac{v_K^2}{v_I^2}-1-\frac{1}{2}\frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{d^2}{R^2}\right]a^2-2d\frac{v_K}{v_I}a+\left(1+\frac{3}{4}\frac{d^2}{R^2}\right)d^2=0.$$

Die exakten Lösungen lauten damit

$$a_{1,2}=\frac{2\frac{v_K}{v_I}\pm\sqrt{4\frac{v_K^2}{v_I^2}-4\left(\frac{v_K^2}{v_I^2}-1-\frac{1}{2}\frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{d^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{3}{4}\frac{d^2}{R^2}\right)}}{2\left(\frac{v_K^2}{v_I^2}-1-\frac{1}{2}\frac{v_K^2}{v_I^2}\frac{d^2}{R^2}\right)}d.$$

Für $d \ll R$ ist

$$a_{1,2}=\frac{\frac{v_K}{v_I}\pm 1}{\frac{v_K^2}{v_I^2}-1}d,$$

so daß für das positive Vorzeichen gilt:

$$a=\frac{\frac{v_K}{v_I}+1}{\frac{v_K^2}{v_I^2}-1}d=\frac{1}{\frac{v_K}{v_I}-1}d.$$

Setzen wir nun noch das Verhältnis $v_K/v_I=6$ ein, erhalten wir einen Abstand von

$$a=\frac{1}{5}d$$

und entsprechend einen Weg

$$b_1=6a=\frac{6}{5}d>d.$$

Die zurückzulegende Flugstrecke der angreifenden Kinschal ist somit größer als ihr ursprünglicher Abstand. Die Abfangrakete kommt also von hinten. Der Vorhalt reicht ins eigene Territorium hinein, was strategisch ungünstig ist.

$h\,[\mathrm{m}]$	$d\,[\mathrm{km}]$	$b_1\,[\mathrm{km}]$	$a\,[\mathrm{km}]$	$t_K\,[\mathrm{s}]$	$t_I\,[\mathrm{s}]$
100	35,70	42,84	7,14	10,41	10,41
500	79,82	95,81	15,97	23,28	23,28
1000	112,88	135,54	22,59	32,93	32,93
1500	138,26	166,04	27,67	40,34	40,34
2000	159,65	191,79	38,79	46,60	46,60

Tabelle 2. Übersicht über die Zusammenhänge zwischen Flughöhe, Entdeckungsreichweite, Flugstrecke und Flugzeit

Neben dem militärischen gibt es aber auch noch einen physiologischen Aspekt bzgl. des Einsatzes von Hyperschallraketen. Derzeit gibt es kaum verläßliche Angaben, wieviel Dezibel eine Hyperschallrakete am Boden erzeugt. Fakt ist, daß man bei Werten über 160 dB Gefahr läuft, daß das Trommelfell reißt. Wer einem Geräuschpegel von 200 dB ausgesetzt ist, dessen Lunge würde durch die Druckwelle einfach zerfetzt. Eine in Bodennähe fliegende Hyperschallrakete kann daher immer nur als Abschreckung gedacht sein, um dem Gegner zu signalisieren, worauf er sich einläßt, wenn er seinerseits Massenvernichtungswaffen einsetzt.

Anhang

```
% Programm Kinschal
% Erdradius R in m
R = 6371000;
% Schallgeschwindigkeit u in m/s
u = 343;
% Flughöhe der Missile h in m
h = 1000;

% Ortungsreichweite d in m
d = sqrt(2*h*R+h^2)

% Weg b der Kinschal bis zum Kollisionspunkt in m
b = (R+h)*atan(d/R)

% Geschwindigkeit der Kinschal in m/s
v_K = 12*u

% Zeit der Kinschal t_K bis zum Kollisionspunkt in Sekunden
t_K = b/v_K

% Geschwindigkeit Iron Dome in m/s
v_I = 2*u

% Zeit der Iron Dome bis zum Kollisionspunkt in Sekunden
t_I = h/v_I

% Wartezeit t_W in Sekunden
t_W = t_K - t_I
```



```
% Näherung Wartezeit t_W_app in Sekunden
t_W_app = d/v_K*(1-1/2*v_K/v_I*d/R+1/2*d^2/R^2)

% Geschwindigkeitsverhältnis v_r von Kinschal zu Iron Dome
v_r = v_K/v_I

% Abstand a zum Ziel in m
a = (2*v_r+sqrt(4*v_r^2-4*(v_r^2-1-
v_r^2*d^2/R^2)*(1+3/4*d^2/R^2)))*d/2/(v_r^2-1-v_r^2*d^2/R^2)
a_app = d/(v_r-1)

% Weg b1 der Kinschal bis zum Kollisionspunkt in m
b1 = v_r*a

% Maximale Zeit der Kinschal t_K_max bis zum Kollisionspunkt in Sekunden
t_K_max = b1/v_K

% Maximale Zeit der Iron Dome t_I_max bis zum Kollisionspunkt in Sekunden
t_I_max = a/v_I
```

>> kinschal

d = 1.1288e+05

b = 1.1289e+05

v_K = 4116

t_K = 27.4273

v_I = 686

t_I = 1.4577

t_W = 25.9696

t_W_app = 25.9723

v_r = 6

a = 2.2589e+04

a_app = 2.2577e+04

b1 = 1.3554e+05

t_K_max = 32.9289

t_I_max = 32.9289

