Aufgabe: Begründen Sie, warum auch die Kruskal-Szekeres-Koordinaten über eine Einstein-Rosen-Brücke bzw. durch ein Wurmloch kein Entweichen aus dem All ermöglichen.

Lösung: Wenn man Begriffe wie Wurmlöcher oder Zeitreisen hört, sollte man vorsichtig sein. Was Einstein und Rosen 1935 beschrieben (Gl. (1) aus [1]), stellt nichts anderes dar als die Gleichung einer Sphäre in Kugelkoordinaten,

$$ds^2 = \alpha^2 x_1^2 dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

wobei lediglich *x*- und *z*-Koordinate miteinander vertauscht wurden. Wenn wir das ebenfalls tun, so lauten unsere vier Koordinatengleichungen wie folgt:

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_3 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_4 = ct,$$

wobei r der Radius ist, t die Zeit, θ der Polar- und φ der Azimutwinkel. Um eine Vertauschung von Raum und Zeit nicht ohne weiteres erkennbar zu machen, begeben wir uns nachfolgend nicht ein System, in dem die Lichtgeschwindigkeit c und die Gravitationskonstante G gleich eins gesetzt werden. Mit den im Anhang ausgeführten Transformationen ergeben sich die Differentiale

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\\
dx_2 &= \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi,\\
dx_3 &= \sin\theta\sin\varphi dr + r\sin\varphi\cos\theta d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi,\\
dx_4 &= cdt
\end{aligned}$$

und damit die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
dx_4^2 - dx_1^2 &= c^2dt^2 - \cos^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta - r^2\sin^2\theta d\theta^2,\\
dx_2^2 + dx_3^2 &= \sin^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta + r^2\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.
\end{aligned}$$

Somit lautet das gewöhnliche Wegdifferential der Speziellen Relativitätstheorie in Kugelkoordinaten $r,\ \theta,\ \varphi,\ t$ wie folgt:

$$ds^2 = dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

wobei die Ausbreitung in *z*-Richtung gewählt wurde. Die von Einstein und Rosen angegebene Transformation, die lediglich das kartesische Wegelement

$$ds^2 = d\xi_4^2 - d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2$$

in ein sphärisches transformiert,

$$ds^2 = \alpha^2 x_1^2 dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

lautet

$$\xi_1 = x_1 \cosh \alpha x_4, \quad \xi_2 = x_2,$$
$$\xi_3 = x_3, \qquad\qquad \xi_4 = x_1 \sinh \alpha x_4.$$

Indem man die Differentiale

$$d\xi_4 = dx_1 \sinh \alpha x_4 + \alpha x_1 dx_4 \cosh \alpha x_4, \quad d\xi_2 = dx_2,$$
$$d\xi_1 = dx_1 \cosh \alpha x_4 + \alpha x_1 dx_4 \sinh \alpha x_4, \quad d\xi_3 = dx_3$$

unter Benutzung der Hilfsgrößen $d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = dx_2^2 + dx_3^2$ und $d\xi_4^2 - d\xi_1^2 = \alpha^2 x_1^2 dx_4^2 - dx_1^2$ in das kartesische Wegelement einsetzt, kann man zeigen, daß

$$ds^2 = d\xi_4^2 - d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 = \alpha^2 x_1^2 dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

wobei wir noch von der trigonometrischen Identität $\cosh^2 \alpha x_4 - \sinh^2 \alpha x_4 = 1$ Gebrauch gemacht haben. Wenn die Größe x_4 die Dimension eines Orts hat, besitzt α die Einheit einer Ortsfrequenz, womit die Größe αx_1 dimensionslos ist. Setzen wir die eingangs definierten Koordinaten in die Einstein-Rosen-Transformation ein, so nehmen die Transformationsgleichungen folgende Gestalt an:

$$\xi_1 = r \cos\theta \cosh \alpha ct, \quad \xi_2 = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$\xi_3 = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad \xi_4 = r \cos\theta \sinh \alpha ct.$$

Wenn wir nun noch die kartesischen Koordinaten durch Kugelkoordinaten ausdrücken, ist das differentielle Wegelement mit den im Anhang abgeleiteten Ausdrücken

$$d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = \sin^2\theta dr^2 + 2r \sin\theta \cos\theta dr d\theta + r^2 \cos^2\theta d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$
$$d\xi_4^2 - d\xi_1^2 = \alpha^2 r^2 \cos^2\theta c^2 dt^2 - \cos^2\theta dr^2 + 2r \sin\theta \cos\theta dr d\theta - r^2 \sin^2\theta d\theta^2$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \alpha^2 r^2 \cos^2\theta c^2 dt^2 - \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) dr^2 + 2r \sin\theta \cos\theta dr d\theta \\ & - r^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) d\theta^2 - 2r \sin\theta \cos\theta dr d\theta - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

und nimmt nach Kürzen folgende endgültige Form an:

$$ds^2 = \alpha^2 r^2 \cos^2\theta c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Einstein und Rosen leiteten mittels der Substitution

$$u^2 = r - R_S$$

die Identitäten

$$1-\frac{R_S}{r}=1-\frac{R_S}{u^2+R_S}=\frac{u^2+R_S}{u^2+R_S}-\frac{R_S}{u^2+R_S}=\frac{u^2}{u^2+R_S}$$

bzw.

$$\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}=\frac{u^2+R_S}{u^2}$$

her, womit die Schwarzschildmetrik (Gl. (5) aus [1]) folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}ds^2&=\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{R_S}{r}}-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\\&=\frac{u^2}{u^2+R_S}c^2dt^2-\frac{u^2+R_S}{u^2}dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right).\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Differentials $2udu=dr$ konnten Einstein und Rosen nun ihre eigene Metrik ableiten (Gl. (5a) aus [1]), die frei von Randsingularitäten ist,

$$ds^2=\frac{u^2}{u^2+R_S}c^2dt^2-4\left(u^2+R_S\right)du^2-\left(u^2+R_S\right)^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

denn auf dem Schwarzschildrand mit $u=0$ folgt

$$ds^2=-4R_Sdu^2-R_S^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)<0,$$

die sogenannte Einstein-Rosen-Brücke. Einstein und Rosen schreiben dazu wörtlich: „Versucht man, die reguläre Lösung (5a) im Raum von $r,\ \theta,\ \varphi,\ t$ zu interpretieren, so kommt man zu folgendem Schluß. Der vierdimensionale Raum wird mathematisch durch zwei kongruente Teile oder Blätter beschrieben, entsprechend $u>0$ und $u<0$, die durch eine Hyperebene $r=R_S$ oder $u=0$ verbunden sind, in der g verschwindet. Wir nennen eine solche Verbindung zwischen den beiden Blättern eine Brücke." Die Hyperebene ist hier nichts anderes als der Ereignishorizont, der nur in eine Richtung durchlässig ist. Folglich beschreibt $ds^2<0$ einen raumartigen Differenzvektor, bei dem es sich nicht um Ursache und Wirkung handeln kann, denn dann müßte sich eine Ursache mit Überlichtgeschwindigkeit auswirken. Ereignisse außerhalb des Rückwärts- bzw. Vergangenheits-Lichtkegels sind für einen Beobachter nicht sichtbar, d. h. sie liegen hinter dem Ereignishorizont.

Wenn die Ereignisse indes lichtartig sind, z.B. in der Singularität mit $r=0,$ gilt

$$ds^2=\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-\frac{R_S}{r}}=0$$

und damit

$$\frac{dr}{cdt} = \frac{u^2}{u^2 + R_S} = 1 - \frac{R_S}{r} = \alpha^2 r^2 \cos^2\theta,$$

wie der Vergleich mit

$$ds^2 = \alpha^2 r^2 \cos^2\theta \cdot c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

zeigt. Für $r \le R_S$, d.h. innerhalb des Schwarzen Lochs, ist das Wegelement $ds^2 < 0$ und wir sind daher in diesem gefangen. Wenn daher das Weltall ein Schwarzes Loch darstellt, können wir es auch nicht verlassen. Es gibt keine Brücke nach draußen, etwa in ein anderes Universum. Kehren wir also wieder zur Schwarzschildmetrik zurück,

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Für $r \to \infty$ folgt das gewöhnliche Wegelement der Raumzeit außerhalb irgendwelcher Singularitäten,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Auf dem Schwarzschildrand des Alls $r = R_S$ resultiert hingegen keine Singularität, denn nach Umformung von

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= -\frac{dr^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)r^2 d\theta^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)r^2 \sin^2\theta d\varphi^2}{1 - \frac{R_S}{r}} \end{aligned}$$

in

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)ds^2 + dr^2 + r^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)d\theta^2 + r^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 = 0$$

folgt nach Grenzübergang

$$\lim_{r \to R_S}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)ds^2 + \lim_{r \to R_S} dr^2 + \lim_{r \to R_S}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)r^2 d\theta^2 + \lim_{r \to R_S}\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 = 0,$$

also das erwartete Ergebnis

$$dr^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad r = R_S.$$

Dieses ist unabhängig davon, welchen Wert s hat. Auf dem Schwarzschildrand liegt also Lichtartigkeit vor.

Um den Grenzübergang für $r = 0$ durchzuführen, formen wir das Wegdifferential wie folgt um:

$$rds^2 + c^2\left(R_S - r\right)dt^2 - \frac{r^2 dr^2}{R_S - r} + r^3 d\theta^2 + r^3 \sin^2\theta d\varphi^2 = 0.$$

In diesem Ausdruck verschwinden alle Terme bis auf einen,

$$ds^2 \lim_{r\to 0} r + c^2 dt^2 \lim_{r\to 0}\left(R_S - r\right) - dr^2 \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{R_S - r} + \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\lim_{r\to 0} r^3 = R_S c^2 dt^2 = 0,$$

mit dem ebenfalls erwarteten Ergebnis

$$dt^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad t = 0,$$

und es liegt ebenfalls Lichtartigkeit vor, was schon aus Stetigkeitsgründen eines in sich geschlossenen Raums erfüllt sein muß. Das Differential der Schwarzschildlösung

$$c^2\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}}dr^2$$

können wir nun wie folgt umformen:

$$c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-2} dr^2 = \left(cdt + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr\right)\left(cdt - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr\right) = dvdu,$$

wobei

$$dv = cdt + \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} = cdt + dr + \frac{1}{\frac{r}{R_S} - 1}dr = cdt + dr + R_S d\ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right),$$

$$du = cdt - \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} = cdt - dr - \frac{1}{\frac{r}{R_S} - 1}dr = cdt - dr - R_S d\ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right).$$

Damit folgen für den Außenraum eines Schwarzen Lochs die Koordinaten

$$v = ct + r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right), \quad u = ct - r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

mit den totalen Differentialen

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial r} dr = cdt + \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr,$$
$$du = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial r} dr = cdt - \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr.$$

Für Summe und Differenz ergeben sich somit die Ausdrücke

$$v + u = 2ct, \quad v - u = 2\left[r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1 \right) \right].$$

Während der Zeit-Term aus der Summe der neuen Koordinaten abgeleitet werden kann, ist die Ortsvariable nur implizit gegeben. Aufgabe ist es nun, die Differentiale dt und dr durch die neuen Differentiale du und dv auszudrücken. Zunächst gilt

$$dv + du = 2cdt, \quad dv - du = 2\frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} dr.$$

Quadrieren wir beide Seiten,

$$c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dt^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{R_S}{r} \right)\left(dv^2 + 2dvdu + du^2 \right),$$
$$\frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{R_S}{r} \right)\left(dv^2 - 2dvdu + du^2 \right)$$

und ziehen die beiden Ausdrücke voneinander ab, ergibt sich das Schwarzschild-Differential in Kruskal-Szekeres-Koordinaten,

$$c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{R_S}{r}} = \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dvdu,$$

und das infinitesimale Wegelement ist damit gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dvdu - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right).$$

Nach Umformung der Koordinatendifferenz $v - u$ erhalten wir die Gleichung

$$1 - \frac{R_S}{r} = \frac{R_S}{r}\left(\frac{r}{R_S} - 1 \right) = \frac{R_S}{r} \exp\frac{v - u}{2R_S} \exp\left(-\frac{r}{R_S} \right).$$

Damit gilt für das Linienelement der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{R_S}{r}\exp\frac{v-u}{2R_S}\exp\left(-\frac{r}{R_S}\right)dvdu - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Führen wir nun im Sinne von Einstein und Rosen anstatt v und u neue Koordinaten ξ_1 und ξ_4 ein, deren Summe und Differenz gegeben sind durch

$$\xi_1 + \xi_4 \equiv e^{\frac{v}{2R_S}}, \quad \xi_1 - \xi_4 \equiv e^{-\frac{u}{2R_S}},$$

so ergibt sich eine Hyperbel der Form

$$\xi_1^2 - \xi_4^2 = (\xi_1 + \xi_4)(\xi_1 - \xi_4) = \exp\frac{v-u}{2R_S} = \left(\frac{r}{R_S} - 1\right)e^{\frac{r}{R_S}}.$$

Selbiges gilt auch für die Differentiale

$$d\xi_4 + d\xi_1 = \frac{1}{2R_S}\exp\left(\frac{v}{2R_S}\right)dv,$$
$$d\xi_4 - d\xi_1 = \frac{1}{2R_S}\exp\left(-\frac{u}{2R_S}\right)du,$$

mit

$$d\xi_4^2 - d\xi_1^2 = \frac{1}{4R_S^2}e^{\frac{v-u}{2R_S}}dvdu.$$

Wenn wir dieses Resultat im Linienelement substituieren, folgt im Außenraum eines Schwarzen Lochs die Schwarzschildmetrik in Kruskal-Szekeres-Koordinaten,

$$ds^2 = \frac{4R_S^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{R_S}\right)\left(d\xi_4^2 - d\xi_1^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Nun setzen wir die alten Variablen

$$v = ct + r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right), \quad u = ct - r - R_S \ln \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right)$$

noch in die obigen Koordinatengleichungen ein, und wir erhalten die Lösungen

$$\xi_1 + \xi_4 = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1e^{\frac{r}{2R_S}}}\, e^{\frac{ct}{2R_S}} = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1e^{\frac{r}{2R_S}}}\left(\cosh\frac{ct}{2R_S} + \sinh\frac{ct}{2R_S}\right),$$
$$\xi_1 - \xi_4 = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1e^{\frac{r}{2R_S}}}\, e^{-\frac{ct}{2R_S}} = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1e^{\frac{r}{2R_S}}}\left(\cosh\frac{ct}{2R_S} - \sinh\frac{ct}{2R_S}\right).$$

Nach Summen- und Differenzbildung lauten diese

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1}\, e^{\frac{r}{2R_S}} \cosh\frac{ct}{2R_S}, \quad \xi_4 = \sqrt{\frac{r}{R_S} - 1}\, e^{\frac{r}{2R_S}} \sinh\frac{ct}{2R_S}.$$

An der Stelle $r = R_S$ und $\theta = 0$ gilt damit

$$ds^2 = \frac{4R_S^2}{e}\left(d\xi_4^2 - d\xi_1^2\right) - R_S^2 d\theta^2 = 0,$$

und wir erhalten eine gleichseitige Hyperbel der Form

$$d\xi_4^2 - d\xi_1^2 = \frac{e}{4} d\theta^2,$$

die für konstantes θ in eine Gerade übergeht. Für $\theta = 0$ gilt demnach

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0.$$

Wenn wir nun die Lichtgeschwindigkeit durch ihr Inverses ersetzen und dafür schreiben

$$v = \frac{dt}{dr} = c\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} = \frac{c}{1 - \frac{R_S}{r}},$$

wobei Raum und Zeit ihre Rolle vertauscht haben, muß im Außenraum eines Schwarzen Lochs $v > c$ gelten, und damit kann der Radius

$$r = \frac{R_S}{1 - \frac{c}{v}}$$

Werte $r > R_S$ annehmen. Im Ergebnis sind also Raum und Zeit wesensgleich.

Im Innenraum der Singularität $r < R_S$ hingegen müssen wir die neuen Koordinaten anders darstellen, und zwar wie folgt:

$$dv = cdt + \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} = cdt + dr - \frac{1}{1 - \frac{r}{R_S}} dr = cdt + dr + R_S d \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right),$$

$$du = cdt - \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} = cdt - dr + \frac{1}{1 - \frac{r}{R_S}} dr = cdt - dr - R_S d \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right).$$

Damit ergibt sich für den Innenraum

$$v = ct + r + R_S \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right), \quad u = ct - r - R_S \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right),$$

und die totalen Differentiale lauten

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial r} dr = cdt + dr - \frac{1}{1 - \frac{r}{R_S}} dr,$$

$$du = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial r} dr = cdt - dr + \frac{1}{1 - \frac{r}{R_S}} dr.$$

Für Summe und Differenz ergeben sich die Ausdrücke

$$v + u = 2ct, \quad v - u = 2r + 2R_S \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right).$$

Setzen wir v und u in gehabter Manier in die obigen Koordinatengleichungen ein, so folgt

$$\xi_1 + \xi_4 = \sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{ct}{2R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}}, \quad \xi_1 - \xi_4 = \sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}} e^{-\frac{ct}{2R_S}}.$$

Nach Variablen getrennt erhalten wir die inneren Lösungen

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}} \left(e^{\frac{ct}{2R_S}} + e^{-\frac{ct}{2R_S}}\right) = \sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}} \cosh\frac{ct}{2R_S},$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}} \left(e^{\frac{ct}{2R_S}} - e^{-\frac{ct}{2R_S}}\right) = \sqrt{1 - \frac{r}{R_S}} e^{\frac{r}{2R_S}} \sinh\frac{ct}{2R_S}.$$

Beide stellen mit Ausnahme von $r = R_S$ eine gleichseitige Hyperbel mit exponentiell anwachsenden Halbachsen dar,

$$\xi_1^2 - \xi_4^2 = \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) e^{\frac{r}{R_S}} \left(\cosh^2\frac{ct}{2R_S} - \sinh^2\frac{ct}{2R_S}\right) = \left(1 - \frac{r}{R_S}\right) e^{\frac{r}{R_S}}.$$

Für $r = 0$ lautet die Hyperbelgleichung

$$\xi_1^2 - \xi_4^2 = 1,$$

und auf dem Schwarzschildradius geht diese in das Geradenpaar $\xi_1 = \pm\xi_4$ über. Mittels der partiellen Ableitung des Vorfaktors

$$\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}e^{\frac{r}{2R_S}}=-\frac{r}{2R_S^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}}e^{\frac{r}{2R_S}}$$

folgen für die ersten Ableitungen der beiden Variablen nach r die Ausdrücke

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial r}=-\frac{r}{2R_S^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}}e^{\frac{r}{2R_S}}\cosh\frac{ct}{2R_S},\quad \frac{\partial\xi_4}{\partial r}=-\frac{r}{2R_S^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}}e^{\frac{r}{2R_S}}\sinh\frac{ct}{2R_S}$$

und damit die totalen Ableitungen

$$\begin{aligned}d\xi_4&=\frac{\partial\xi_4}{\partial t}dt+\frac{\partial\xi_4}{\partial r}dr=\frac{1}{2R_S}e^{\frac{r}{2R_S}}\left[cdt\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}\cosh\frac{ct}{2R_S}-\frac{rdr}{R_S}\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}^{-1}\sinh\frac{ct}{2R_S}\right],\\ d\xi_1&=\frac{\partial\xi_1}{\partial t}dt+\frac{\partial\xi_1}{\partial r}dr=\frac{1}{2R_S}e^{\frac{r}{2R_S}}\left[cdt\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}\sinh\frac{ct}{2R_S}-\frac{rdr}{R_S}\sqrt{1-\frac{r}{R_S}}^{-1}\cosh\frac{ct}{2R_S}\right].\end{aligned}$$

Deren Quadrate sind

$$\begin{aligned}d\xi_1^2=\frac{1}{4R_S^2}e^{\frac{r}{R_S}}&\left[c^2dt^2\left(1-\frac{r}{R_S}\right)\sinh^2\frac{ct}{2R_S}+\frac{r^2dr^2}{R_S^2}\left(1-\frac{r}{R_S}\right)^{-1}\cosh^2\frac{ct}{2R_S}\right]\\ &-\frac{r}{2R_S^3}e^{\frac{r}{R_S}}cdtdr\sinh\frac{ct}{2R_S}\cosh\frac{ct}{2R_S},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\xi_4^2=\frac{1}{4R_S^2}e^{\frac{r}{R_S}}&\left[c^2dt^2\left(1-\frac{r}{R_S}\right)\cosh^2\frac{ct}{2R_S}+\frac{r^2dr^2}{R_S^2}\left(1-\frac{r}{R_S}\right)^{-1}\sinh^2\frac{ct}{2R_S}\right]\\ &-\frac{r}{2R_S^3}e^{\frac{r}{R_S}}cdtdr\sinh\frac{ct}{2R_S}\cosh\frac{ct}{2R_S}.\end{aligned}$$

Für die Differenz der Differentialquadrate bedeutet das

$$\begin{aligned}d\xi_1^2-d\xi_4^2&=\frac{1}{4R_S^2}e^{\frac{r}{R_S}}\left[\cosh^2\frac{ct}{2R_S}-\sinh^2\frac{ct}{2R_S}\right]\left\{\left(\frac{r}{R_S}-1\right)c^2dt^2-\left(\frac{r}{R_S}-1\right)^{-1}\frac{r^2dr^2}{R_S^2}\right\}\\ &=\frac{r}{4R_S^3}e^{\frac{r}{R_S}}\left\{\left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2\right\}.\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Ergebnis wieder in das obige Wegelement ein, vertauschen Raum und Zeit ihre Rolle, nicht jedoch der Winkelanteil,

$$ds^2 = -\frac{4R_S^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{R_S}\right)\left(d\xi_1^2 - d\xi_4^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$
$$= \frac{dr^2}{1-\frac{R_S}{r}} - \left(1-\frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

An der Stelle $r = R_S$ und $\theta = 0$ gilt damit

$$ds^2 = \frac{4R_S^2}{e}\left(d\xi_1^2 - d\xi_4^2\right) - R_S^2 d\theta^2.$$

Das ist wegen der Lichtartigkeit im Ereignishorizont $(ds = 0)$ die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel,

$$d\xi_1^2 - d\xi_4^2 = \frac{e}{4}d\theta^2,$$

allerdings gilt nunmehr für $\theta = 0$ gemäß der Schwarzschildmetrik im Innenraum die übliche Definition der Radialgeschwindigkeit

$$v = \frac{dr}{dt} = c\left(1-\frac{R_S}{r}\right),$$

daher muß im Innenraum eines Schwarzen Lochs $v < c$ sein, damit der Radius

$$r = \frac{R_S}{1-\frac{v}{c}}$$

genau wie in unserem Universum (siehe Aufgabe [165]) gegen Unendlich wandern kann. Wird die Lichtgeschwindigkeit erreicht, wird auch der Innenraum eines Schwarzen Lochs nach dem Relativitätsprinzip unendlich groß. Anders ist es bei der Krümmung, dem Kehrwert des Radius. Fassen wir beide Räume zusammen, ist diese gegeben durch

$$\kappa = \begin{cases} \dfrac{c^2}{2GM}\left(1-\dfrac{v}{c}\right) & \text{für} \quad v \le c, \\ \dfrac{c^2}{2GM}\left(1-\dfrac{c}{v}\right) & \text{für} \quad v > c. \end{cases}$$

Die Krümmung des Raums verschwindet nur für Lichtgeschwindigkeit und sie ist maximal für $v = 0$ bzw. $1/v = 0,$ da wir letztere reziprok definiert haben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Masse im Innenraum zunimmt und folglich im Außenraum abnehmen muß. Das bedeutet, daß sich ein Schwarzes Loch bei Überschreiten der Lichtgeschwindigkeit wieder zusammenziehen würde und der Raum sich dadurch stärker krümmt. Demnach würde auch das All wieder zu einer Singularität zurückkehren. Da die Entropie in unserem Universum zunimmt, müßte sie im Außenraum abnehmen. Das ist nur im Antiuniversum möglich und nur durch eine CPT-Transformation zu erreichen. Schon aus diesem Grund kann es Wurmlöcher und Zeitreisen vor Erreichen der Lichtgeschwindigkeit nicht geben. Auch die Einführung höherer Dimensionen ist hier nicht weiter hilfreich. Wir sind und bleiben Gefangene der Raumzeit.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, dann kommen wir zu dem Schluß: Die Schwarzschildmetrik beschreibt Außen- und Innenraum eines Schwarzen Lochs korrekt. Für sein Inneres gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie für unser sichtbares Universum. Es gibt kein Äußeres, es sei denn, man wollte den Grenzwert der Lichtgeschwindigkeit in Frage stellen. Außerdem beginnt das Universum nicht mit einer Punktsingularität, sondern auf dem Rand des Schwarzschildradius als Randsingularität. Seine wachsende Ausdehnung ergibt sich nur scheinbar aufgrund des Relativitätsprinzips. Auch im Innern eines Schwarzen Lochs gelten dieselben Naturgesetze wie außerhalb, und damit ist der Ereignishorizont von innen her nicht erreichbar, und sei das Wurmloch auch noch so klein. Ein Schwarzes Loch kann nicht verlassen werden, und es zerfällt langsamer als es wächst. Der umgekehrte Fall, daß etwas ins Schwarze Loch hineingezogen wird, ist physikalisch erlaubt, sonst wäre ja ein Massenzuwachs auch nicht möglich. Somit müssen die Science-fiction-Träume so mancher Autoren wohl beiseite gelegt werden. Es gibt nämlich einen Unterschied zwischen einer Schallmauer und einem Wurmloch, und dieser besteht darin, daß die Schallgeschwindigkeit keine Grenzgeschwindigkeit darstellt, die Lichtgeschwindigkeit allerdings sehr wohl.

Literatur

[1] A. Einstein, N. Rosen: *The Particle Problem in the General Theory of Relativity*: In Physical Review Vol. 48, S. 73-77 (1935).

Anhang

Der Ortsvektor hat in sphärischen Koordinaten folgende Darstellung:

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\mathbf{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_2 + r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_3.$$

Sein totales Differential lautet

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}d\varphi = \left(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(\sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi\right)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \left(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt das Betragsquadrat

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^2 &= \left(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right)^2 \\ &\quad + \left(\sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &\quad + \left(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned}$$

In der Notation von Einstein und Rosen sind die totalen Differentiale der vierdimensionalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} dx_1 &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, \\ dx_2 &= \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi, \\ dx_3 &= \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi, \\ dx_4 &= cdt. \end{aligned}$$

Die Betragsquadrate lauten

$$\begin{aligned} dx_1^2 &= \left(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta\right)^2 \\ &= \cos^2\theta dr^2 - 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta + r^2\sin^2\theta d\theta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_2^2 &= \left(\sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &= \sin^2\theta\cos^2\varphi dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi dr d\theta \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 - 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi \\ &\quad + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 - 2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_3^2 &= \left(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &= \sin^2\theta\sin^2\varphi dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi dr d\theta \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 + 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 + 2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr, \end{aligned}$$

$$dx_4^2 = c^2 dt^2.$$

Addieren wir den zweiten und den dritten Term, so ergibt sich

$$\begin{aligned} dx_2^2 + dx_3^2 = {} & \sin^2\theta\cos^2\varphi dr^2 + \sin^2\theta\sin^2\varphi dr^2 \\ & +2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi dr d\theta + 2r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi dr d\theta \\ & +r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 \\ & -2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi + 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi \\ & +r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 \\ & -2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr + 2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr. \end{aligned}$$

Kürzen wir noch entsprechend, verbleibt

$$\begin{aligned} dx_2^2 + dx_3^2 = {} & \sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)dr^2 \\ & +2r\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)dr d\theta \\ & +r^2\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\theta^2 \\ & +r^2\sin^2\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi^2 \\ = {} & \sin^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta \\ & +r^2\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \end{aligned}$$

Ähnlich gilt

$$dx_4^2 - dx_1^2 = c^2dt^2 - \cos^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta dr d\theta - r^2\sin^2\theta d\theta^2.$$

Das differentielle Wegelement lautet somit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_4^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\ &= c^2dt^2 - \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)dr^2 - r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \\ &= c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \end{aligned}$$

In der von Einstein und Rosen angegebenen Transformation sind die Differentiale gegeben durch

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \cos\theta\cosh\left(\alpha ct\right)dr - r\sin\theta\cosh\left(\alpha ct\right)d\theta + \alpha r\cos\theta\sinh\left(\alpha ct\right)cdt, \\ d\xi_2 &= \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi, \\ d\xi_3 &= \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi, \\ d\xi_4 &= \cos\theta\sinh\left(\alpha ct\right)dr - r\sin\theta\sinh\left(\alpha ct\right)d\theta + \alpha r\cos\theta\cosh\left(\alpha ct\right)cdt. \end{aligned}$$

Bilden wir davon die Betragsquadrate, so folgt

$$\begin{aligned} d\xi_1^2 &= \left(\cos\theta\cosh(\alpha ct)dr - r\sin\theta\cosh(\alpha ct)d\theta + \alpha r\cos\theta\sinh(\alpha ct)cdt\right)^2 \\ &= \cos^2\theta\cosh^2(\alpha ct)dr^2 + r^2\sin^2\theta\cosh^2(\alpha ct)d\theta^2 + \alpha^2 r^2\cos^2\theta\sinh^2(\alpha ct)c^2dt^2 \\ &\quad -2r\sin\theta\cos\theta\cosh^2(\alpha ct)drd\theta + 2\alpha r\cos^2\theta\sinh(\alpha ct)\cosh(\alpha ct)cdtdr \\ &\quad -2\alpha r^2\sin\theta\cos\theta\sinh(\alpha ct)\cosh(\alpha ct)cdtd\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\xi_2^2 &= \left(\sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &= \sin^2\theta\cos^2\varphi dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi drd\theta \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 - 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi \\ &\quad + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 - 2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\xi_3^2 &= \left(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\varphi\sin\theta d\varphi\right)^2 \\ &= \sin^2\theta\sin^2\varphi dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi drd\theta \\ &\quad + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 + 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi d\theta d\varphi \\ &\quad + r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta d\varphi^2 + 2r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi d\varphi dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\xi_4^2 &= \left(\cos\theta\sinh(\alpha ct)dr - r\sin\theta\sinh(\alpha ct)d\theta + \alpha r\cos\theta\cosh(\alpha ct)cdt\right)^2 \\ &= \cos^2\theta\sinh^2(\alpha ct)dr^2 + r^2\sin^2\theta\sinh^2(\alpha ct)d\theta^2 + \alpha^2 r^2\cos^2\theta\cosh^2(\alpha ct)c^2dt^2 \\ &\quad -2r\sin\theta\cos\theta\sinh^2(\alpha ct)drd\theta + 2\alpha r\cos^2\theta\sinh(\alpha ct)\cosh(\alpha ct)cdtdr \\ &\quad -2\alpha r^2\sin\theta\cos\theta\sinh(\alpha ct)\cosh(\alpha ct)cdtd\theta, \end{aligned}$$

so daß deren Summe und Differenz gegeben sind durch

$$d\xi_2^2 + d\xi_3^2 = \sin^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta drd\theta + r^2\cos^2\theta d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

und

$$\begin{aligned} d\xi_4^2 - d\xi_1^2 &= \alpha^2 r^2\cos^2\theta\left(\cosh^2(\alpha ct) - \sinh^2(\alpha ct)\right)c^2dt^2 \\ &\quad + \cos^2\theta\left(\sinh^2(\alpha ct) - \cosh^2(\alpha ct)\right)dr^2 \\ &\quad + 2r\sin\theta\cos\theta\left(\cosh^2(\alpha ct) - \sinh^2(\alpha ct)\right)drd\theta \\ &\quad + r^2\sin^2\theta\left(\sinh^2(\alpha ct)d\theta^2 - \cosh^2(\alpha ct)\right)d\theta^2. \end{aligned}$$

Kürzen wir entsprechend, so ergibt sich

$$d\xi_4^2 - d\xi_1^2 = \alpha^2 r^2\cos^2\theta c^2dt^2 - \cos^2\theta dr^2 + 2r\sin\theta\cos\theta drd\theta - r^2\sin^2\theta d\theta^2$$

und schließlich

$$ds^2 = d\xi_4^2 - d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 = \alpha^2 r^2\cos^2\theta c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$