Aufgabe: Beweisen Sie, daß Zeitreisen in die Vergangenheit nicht möglich sind.

Beweis: Immer wieder tauchen in der Science-fiction-Literatur Theorien auf, die von Zeitreisen handeln und diese allen physikalischen Gesetzmäßigkeiten zum Trotz in den Bereich des Möglichen rücken. Selbst fantasievolle Physiker befinden sich in diesen Zirkeln.

Wir betrachten in dieser Aufgabenstellung die Erde als Mittelpunkt des Universums und lassen das All mit der in seiner Singularität vereinigten Masse *M* mit der Geschwindigkeit *v* von uns wegfliegen.[1] Aus Albert Einsteins Spezieller Relativitätstheorie[2] wissen wir, daß der Raum die Gestalt einer Kugel hat,

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2-s^2=c^2\left(t^2-t'^2\right)=c^2\left(t^2-t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right)=v^2t^2,$$

deren Radius bei konstanter Eigenbeschleunigung *a* und wegen

$$ct=\frac{s}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad \text{bzw.}\quad v=\frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}$$

gegeben ist durch

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2-s^2=\frac{v^2}{c^2}\frac{s^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{a^2t^2s^2}{c^2}.$$

Mit

$$s=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)\approx\frac{c^2}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt daraus

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{c^4}\frac{s^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{c^4}{a^2}\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}=R_S^2.$$

Damit ist der Schwarzschildradius eines beschleunigten Universums gegeben durch

[1] Nach dem Relativitätsprinzip sind zwei beliebige Bezugssysteme, die sich relativ zueinander geradlinig gleichförmig bewegen, äquivalent.

[2] Diese ist eine Vereinfachung der Allgemeinen Relativitätstheorie für den beschleunigungsfreien Fall.

$$R_S = \frac{c^2}{a} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}.$$

Wir betrachten im folgenden aus Gründen der Vereinfachung den nichtbeschleunigten Fall. Wenn sich die Singularität nach unendlicher Zeit mit Lichtgeschwindigkeit von uns wegbewegt, ist $s = t' = 0$ und

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Die Eigenzeit t' ist also stets kleiner als die Zeit t. Während sich das Weltall wegen

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

nach dieser Formel unendlich ausdehnen würde, ist es im bewegten System mit der Eigenzeit t' proportional zum Schwarzschildradius des bewegten Systems, d.h.

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2,$$

wobei $R_S' = ct'$ den Schwarzschildradius des Alls im System der Singularität angibt und die Größe

$$R_S = ct = \frac{ct'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{R_S'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

den Schwarzschildradius im Ruhesystem, in dem wir uns befinden.[3] Geht man davon aus, daß sich das All bis zu Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, dann wird auch seine Masse immer schwerer und damit auch sein Schwarzschildradius,

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2G}{c^2} \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{R_S'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

wobei M_0 die Ruhemasse des Alls ist. Nur in einem System, das sich in absoluter Ruhe befindet wie die Singularität $(v = 0)$, ist der Schwarzschildradius konstant,

$$R_S' = \frac{2GM_0}{c^2}.$$

[3] Ungetrichene Größen beziehen wir auf unser eigenes Ruhesystem, gestrichene auf das bewegte System der Singularität.

Im Weltall befindet sich kein einziger Punkt in Ruhe, weil sämtliche Raumzeitpunkte auf einer Kugeloberfläche liegen, wenn man lichtartige Ereignisse $(s=0)$ annimmt. Daher wird man den Mittelpunkt der Welt auch niemals finden. Allerdings kann man ihn eingrenzen, indem man die Kugeloberfläche so klein wie möglich wählt, und das wäre ganz zu Beginn des Universums unmittelbar nach dem Urknall möglich $(x=y=z=t=0)$. Wenn das All sich ausbreitet, dann eilt die Zeit dem Raum immer voraus, da

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0.$$

Eine Reise in die Vergangenheit würde also bedeuten, daß $s^2 < 0$ und folglich

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 > c^2,$$

was aber nicht sein kann, da sich nichts schneller bewegen kann als das Licht.

Die Singularität ist die Quelle der Hintergrundstrahlung. Aus der Sicht des Ruhesystems des Empfängers vergeht die Zeit in der Singularität aufgrund der Zeitdilatation langsamer. Der Empfänger mißt also in seinem System eine Rotverschiebung, da er sich von der Quelle wegbewegt bzw. die Quelle sich von ihm. Beim Übergang von einem System S in ein System S', das sich relativ zu S längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegt, transformiert sich daher die Energie wie folgt:

$$\frac{E}{c^2} = \frac{\dfrac{E'}{c^2} - \dfrac{v}{c^2}\,p'_x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Das System S' der Singularität bewegt sich in unserem System von uns weg, so daß wir nach dem Relativitätsprinzip auch dieses System als in Ruhe befindlich betrachten können und unser System als das bewegte System. Im System der Singularität ist der Impuls $p'_x = 0$ und die Energie $E' = M_0c^2$. Mithin gilt in unserem ruhenden irdischen Bezugssystem

$$E = \frac{E'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Wir werden also in unserer Galaxis stets einen Radius des Alls messen, der nahezu unendlich ist, wenn v nur nahe genug bei der Lichtgeschwindigkeit liegt,

$$R_S = \frac{2GM_0}{c^2}\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \infty.$$

Die unendliche Ausdehnung des Alls ist daher eine Fiktion, die der Relativitätstheorie geschuldet ist, denn in ihrem eigenen System hat die Singularität eine nahezu verschwindende Größe und es gilt

$$R_S' = s = ct' = c\sqrt{t^2 - \frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}} = ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Nach Umformung zeigt sich, daß die Zeit bis auf irgendwelche Konstanten nichts anderes ist als Masse, Impuls oder Energie,

$$t = \frac{R_S'}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2G}{c^3}\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2G}{c^4}\frac{p_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2G}{c^5}\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

d.h.

$$t = \frac{R_S}{c} = \frac{2GM}{c^3} = \frac{2Gp}{c^4} = \frac{2GE}{c^5},$$

und Eigenzeit nichts anderes als Ruhezeit, Ruhemasse, Ruheimpuls oder Ruheenergie:

$$t' = \frac{R_S'}{c} = t_0 = \frac{2GM_0}{c^3} = \frac{2Gp_0}{c^4} = \frac{2GE_0}{c^5}.$$

Mittels der Heisenbergschen Unschärferelation erhalten wir daraus nach Umformung die Planck-Zeit

$$t_0 = \frac{G\hbar}{c^5 t_0} \quad \text{bzw.} \quad t_0 = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5,39\cdot 10^{-44}\ \text{s}.$$

Aus der Planck-Zeit folgt die Planck-Länge, d.h. der minimale Schwarzschildradius des Universums,

$$ct_0 = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,62\cdot 10^{-35}\ \text{m},$$

und die Planck-Masse, d.h. Ruhemasse des Universums,[4]

$$M_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{4G}} = \frac{t_0 c^3}{2G} = \frac{5,39\cdot 10^{-44}\ \text{s}\cdot 2,998^3\cdot 10^{24}\ \text{m}^3\,\text{s}^{-3}}{2\cdot 6,674\cdot 10^{-11}\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}} = 1,09\cdot 10^{-8}\ \text{kg}.$$

Die Zeit wird also ebenso wie alle anderen Größen unendlich:[5]

[4] Der Faktor 4 unter der Wurzel wird in der Literatur häufig unterschlagen.

[5] Für einen irdischen Beobachter bleiben also Raum und Zeit unendlich, ohne daß dies etwas mit der Wahrheit zu tun hat.

$$t = \frac{R_S}{c}\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2GM_0}{c^3}\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2Gp_0}{c^4}\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2GE_0}{c^5}\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \infty,$$

d.h. wir können die Unendlichkeit bzw. den Urknall als externe Beobachter gar nicht abwarten, weil sich der Raum nicht weiter ausdehnt als bis zu seinem Ereignishorizont. In einem auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigten Raumschiff hätten wir allerdings nach endlicher Zeit die Planck-Zeit, den Zeitpunkt des Urknalls, erreicht:

$$t' = \frac{R_S}{c}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2GM_0}{c^3}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2Gp_0}{c^4}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2GE_0}{c^5}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_0.$$

In diesem Zustand gibt es kein Licht, also auch keine Lichtgeschwindigkeit mehr. Daher ist $v = c = 0.$ Das Universum besitzt also ein kürzeres Alter, wenn es sich in Ruhe befindet, d.h. wenn $v_0 = 0$ ist. Da der Raum einem irdischen Beobachter jetzt und heute noch unendlich groß erscheint, denkt dieser, die Raumkrümmung werde allmählich verschwinden und das All werde flach. Hat er aber einmal Lichtgeschwindigkeit erreicht, die in seinem Eigenzeitsystem der Geschwindigkeit null entspricht, so wird er feststellen, daß Raum und Zeit klein geworden sind und sich ihrem Ruhe-Wert angenähert haben, nämlich der Größe der ursprünglichen Singularität kurz nach dem Urknall, und diese ursprüngliche Singularität hat einen Radius von der Größe der Planck-Länge, also nahezu unendliche Krümmung. Dadurch beginnt eine unfreiwillige Zeitreise zurück zu den Anfängen, weil Zeit ebenso wie Raum, Impuls und Energie an die jeweilige physikalische Größe gekoppelt ist. Das Universum muß also Masse verlieren, während es kollabiert, die von einer neuen Punktsingularität aufgenommen wird, die sofort wieder expandiert. Das wiederholt sich bis in alle Ewigkeit, wobei die Zeit immer wieder von vorne anfängt, womit es eine sogenannte Ewigkeit physikalisch nicht gibt. Das hat unmittelbar mit dem Zusammenbrechen der Lichtgeschwindigkeit zu tun, so daß es den Anschein hat, als wären die Naturgesetze für einen kurzen Augenblick außer Kraft gesetzt. Das trifft aber nicht zu, da es noch ein zweites Universum gibt, das sogenannte Antiuniversum, das vollständig aus Antimaterie besteht und in dem Raum, Zeit und Ladung gespiegelt sind. Die Lichtgeschwindigkeit geht also nicht verloren, sondern lebt im Antiuniversum weiter, und in diesem läuft die Zeit rückwärts und damit auch die Kausalität. Es wäre also gar nicht möglich, eine Zeitmaschine zu bauen, in der die Zeit rückwärts läuft und die Kausalität vorwärts, womit sich auch alle Zeitparadoxien in Wohlgefallen auflösen dürften. Zeit und Kausalität bzw. Entropie sind untrennbar miteinander verbunden.

Im unserem Bezugssystem ändert sich mit der Masse nämlich auch die Temperatur, und zwar umgekehrt proportional dazu,

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

und entsprechend die Entropie

$$S=\frac{kc^3\pi R_S^2}{\hbar G}=\frac{4\pi kGM^2}{\hbar c}=\frac{1}{2}\frac{Mc^2}{T}.$$

Ein All, das sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, dessen Temperatur geht in unserem Ruhesystem gegen den absoluten Nullpunkt,

$$T=\frac{\hbar c^3}{8\pi kGM_0}\lim_{v\to c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\to 0.$$

Im bewegten Bezugssystem der Singularität gilt hingegen die Planck-Temperatur

$$T'=\frac{\hbar c^3}{8\pi kGM_0}\lim_{v\to 0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\hbar c^3}{8\pi kGM_0}=T_0.$$

Daraus folgt die Planck-Entropie des Universums,[6]

$$S_0=\frac{1}{2}\frac{M_0c^2}{T_0}\lim_{v\to 0}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{2}\frac{M_0c^2}{T_0}=\frac{1,09\cdot 10^{-8}\ \mathrm{kg}\cdot 2,998^2\cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-2}}{2\cdot 1,13\cdot 10^{31}\ \mathrm{K}}=4,33\cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}.$$

Natürlich geht auch die Entropie relativistisch gegen Unendlich,

$$S=S_0\lim_{v\to c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\infty.$$

Nun kann man die Zeit noch durch die Temperatur ausdrücken und es folgt

$$t=\frac{2GM}{c^3}=\frac{\hbar}{4\pi kT}=\frac{\hbar}{4\pi kT_0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Zwischen Eigenzeit und Eigentemperatur besteht daher die Beziehung

$$t'=\frac{\hbar}{4\pi kT_0}\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{\hbar}{4\pi kT_0}=t_0,$$

und umgekehrt wird die Zeit unendlich lang, wenn die Geschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit geht,

[6] Sie ist also nicht, wie von Max Planck vorgeschlagen, gleich null, zumal die absolute Temperatur nicht gegen Null gegen kann.

$$t = t_0 \lim_{v \to c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \infty.$$

Wenn man für die Eigenzeit zum Zeitpunkt des Urknalls $(v=0)$ die Planck-Zeit einsetzt, ergibt sich für die Punktsingularität eine Eigen- oder Planck-Temperatur von

$$T_0 = \frac{M_0 c^2}{2\pi k} = \frac{\hbar}{4\pi k t_0} = \frac{1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{s}}{4\pi \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 5{,}39 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}} = 1{,}13 \cdot 10^{31}\ \mathrm{K}.$$

Man sieht deutlich, daß sich nicht nur der Raum, sondern auch die Zeit mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\frac{t_0^2}{t^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{5{,}39 \cdot 10^{-44}\ \mathrm{s}}{13{,}8 \cdot 10^9 \cdot 3{,}15 \cdot 10^7\ \mathrm{s}}\right)^2} = \sqrt{1-1{,}5 \cdot 10^{-122}} \approx 1-0{,}75 \cdot 10^{-122},$$

nur hat jener mehr Freiheitsgrade. Mithin gilt:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{T},$$

d.h. das Weltall hat sich bereits nach einer Zeit von

$$t = \frac{T_0 t_0}{T} = \frac{\hbar}{4\pi k T} = \frac{1{,}055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{s}}{4\pi \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\ s}^{-2}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 2{,}7\ \mathrm{K}} = 2{,}25 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{s}$$

durch inflationäre Ausdehnung auf 3 K abgekühlt. Das ist die Strahlung, die wir heute am Himmel sehen, weil wir nicht bis zum Urknall in die Vergangenheit zurückblicken können. Noch nicht einmal das Licht der fernsten Sterne hat uns bisher erreicht. Könnten wir bis in die Planckzeit zurückschauen, würde sich der Himmel wie im Olbersschen Paradoxon bis auf die oben errechneten $1{,}13 \cdot 10^{31}\ \mathrm{K}$ aufhellen. Fazit ist, daß wir die Singularität, die den Urknall ausgelöst hat, auch mittels Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen können, und selbst wenn, würden wir bei diesen Temperaturen verschmoren. Wenn wir nämlich in der Vergangenheit auftauchen wollen, so geht das nicht, indem wir vorher einfach „abbiegen“ und eine Schleife drehen, sondern wir müssen entweder mit negativer Zeit in die Vergangenheit zurückkehren oder mit positiver Zeit aus dem nächsten Urknall hervorgehen, um wieder in unsere Zeit und unser Universum zurückzukommen. Dafür brauchen wir nach dem oben Gesagten negative Masse bzw. Energie, d.h. eine Rückkehr in die Vergangenheit ist nur im Antiuniversum möglich. Unsere Zeitmaschine müßte komplett aus Antimaterie bestehen, und wir dazu.

In Aufgabe [134] haben wir gezeigt, daß das Gravitationspotential im Innern eines Schwarzen Lochs konstant ist und die Kraftwirkung daher gleich null. Außerhalb des Schwarzschildradius verhält sich das Potential wie das einer Punktmasse. Im Innern befindet sich fast nur oder aus-schließlich Vakuum und es herrscht dort Schwerelosigkeit. Sollte sich dennoch Materie ins Innere eines Schwarzen Lochs verirrt haben, so ist diese allenfalls zu gegenseitiger Anziehung fähig und es kommt zu Dichteanhäufungen im ansonsten leeren Raum. Es kann also keine Masse ins Schwarze Loch fallen und dort, wie man häufig liest, in den Massenmittelpunkt gezogen werden, weil wie gesagt im Innern keine Gravitationskräfte herrschen. Schwarze Löcher, auch die massereichen, haben im Verhältnis zur Gesamtmasse des Alls nur eine verschwindend geringe Masse und daher einen viel kleineren Schwarzschildradius, verbunden mit einer viel stärkeren Krümmung. Sie stellen damit lokale Verzerrungen der universalen Raumzeit dar. In einem Schwarzen Loch herrscht eine andere Zeit als im Universum, weil die Zeit, wie wir oben gesehen haben, vom Krümmungsradius und damit von der Masse abhängt. Auch unser Universum hat noch nicht sein maximales Alter erreicht, weil seine Gesamtmasse noch nicht in einer einzigen Singularität vereinigt ist. Auf dem Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs macht die Zeit daher einen Sprung zurück in die Vergangenheit, was einigen Forschern Anlaß zu der Vermutung gab, Schwarze Löcher könnten Zeitreisen erlauben.

Die Weltlinien von Objekten, die nur der Gravitation unterliegen, sind Geodäten in der gekrümmten Raumzeit. Im Innern eines Schwarzen Lochs gibt es aber keine Gravitation, also ist dort das Universum flach und ohne jede Krümmung, und das Licht breitet sich geradlinig aus, es sei denn in der Nähe größerer Massen. Wo also steckt sie, die Hauptmasse, die ein solches flaches aber dennoch endliches Universum aufspannen könnte? Nun, wir wissen, daß sich die dunkle Energie, die wir nicht sehen können, die es aber geben muß, in der Außenhaut des Universums befindet, auf dem Schwarzschildradius bzw. Ereignishorizont, und dieser besitzt auch durchaus eine Krümmung, auch wenn diese sehr groß sein mag. Dieser Ereignishorizont kann von einem Zeitreisenden nur erreicht werden, wenn seine Reise ohne Ruhemasse, sprich lichtartig erfolgt. Da der Raum mit jeder weiteren Dezimale, mit der wir uns der Lichtgeschwindigkeit nähern, immer größer wird und der Ereignishorizont damit in immer weitere Ferne rückt, wird uns irgendwann die Energie fehlen, um noch weiter ins All vorzustoßen. Irgendwann werden wir erkennen, daß wir uns an einer Sisyphusarbeit abarbeiten, weil wir die Lichtgeschwindigkeit aufgrund der beschleunigten Ausbreitung des Alls erst nach unendlicher Zeit erreichen können, d.h. gar nicht,

$$v = \lim_{t\to\infty} \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} = c.$$

Der Schwarzschildradius einer beschleunigten Singularität verkürzt sich nicht auf nahezu null wie bei der nichtbeschleunigten,

$$R_S' = s = \lim_{v\to c} ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 0,$$

sondern sie geht einem endlichen Wert entgegen,

$$R_S' = s = \lim_{t\to\infty}\frac{ct}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a}\lim_{v\to c}\frac{v}{c} = \frac{c^2}{a},$$

wobei a die im ruhenden System gemessene Beschleunigung ist. Damit lautet der Schwarzschildradius im System des Beobachters

$$R_S = \frac{R_S'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3} = \frac{c^2}{a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}.$$

Im Prinzip gehorcht dieses System aber derselben Logik. Der Krümmungsradius im beschleunigten System bleibt endlich, nur im ruhenden System wird er unendlich, und damit verschwindet auch die Raumkrümmung, allerdings nur scheinbar.

Betrachten wir nun noch die Oberfläche einer eingebetteten Singularität mit Radius $r_S < R_S$. Einstein hat für die Ableitung der Speziellen Relativitätstheorie denkbar ungeeignete Koordinaten gewählt, nämlich kartesische. Wenn wir mit (r_S, φ, θ) Schwarzschildradius, Breite[7] und Länge auf dieser Kugeloberfläche bezeichnen, dann sind die kartesischen Koordinaten wie folgt zu transformieren:

$$x = r_S \sin\theta\cos\varphi, \quad y = r_S\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r_S\cos\theta,$$

und das Flächenelement lautet $dA = r_S^2\sin\theta d\theta d\varphi.$ Die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial\theta}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\theta}\mathbf{e}_z = r_S\cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_x + r_S\sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_y - r_S\sin\theta\mathbf{e}_z,\\ \mathbf{r}_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\mathbf{e}_z = -r_S\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_x + r_S\sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_y,\end{aligned}$$

und das Kreuzprodukt der beiden Vektoren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi &= r_S^2\sin\theta\left(\cos\theta\mathbf{e}_x\times\mathbf{e}_y + \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_y\times\mathbf{e}_z + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_x\right)\\ &= r_S^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + r_S^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + r_S^2\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Mit dem Betrag $\left|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi\right| = r^2\sin\theta$ lautet der Normalenvektor schließlich

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi}{\left|\mathbf{r}_\theta\times\mathbf{r}_\varphi\right|} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z,$$

[7] In bezug auf den Pol, nicht auf den Äquator

und mit den Beträgen $|\mathbf{r}_\theta| = r_S$ und $|\mathbf{r}_\varphi| = r_S \sin\theta$ sind die normierten Tangentialvektoren, welche die gesamte Kugeloberfläche überdecken, gegeben durch

$$\mathbf{t}_\theta = \frac{\mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\theta|} = \cos\varphi\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\varphi\cos\theta\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{t}_\varphi = \frac{\mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_\varphi|} = -\sin\varphi\mathbf{e}_x + \cos\varphi\mathbf{e}_y.$$

Für $\varphi = 0$ wird das Problem zweidimensional, und in der *x*-*z*-Ebene können wir schreiben:

$$\mathbf{t}_\theta = \cos\theta\mathbf{e}_x - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{t}_\varphi = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{N} = \sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_z.$$

Der Raum ist daher rotationssymmetrisch um die hier gewählte *y*-Achse, denn es gilt im Falle

$$\begin{aligned}
&\theta = 0: && \mathbf{t}_\theta = \mathbf{e}_x, && \mathbf{t}_\varphi = \mathbf{e}_y, && \mathbf{N} = \mathbf{e}_z,\\
&\theta = \pi/2: && \mathbf{t}_\theta = -\mathbf{e}_z, && \mathbf{t}_\varphi = \mathbf{e}_y, && \mathbf{N} = \mathbf{e}_x,\\
&\theta = \pi: && \mathbf{t}_\theta = -\mathbf{e}_x, && \mathbf{t}_\varphi = \mathbf{e}_y, && \mathbf{N} = -\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Für $\varphi = \pi$ hingegen ist der Raum rotationssymmetrisch um die negative *y*-Achse:

$$\mathbf{t}_\theta = -\cos\theta\mathbf{e}_x - \sin\theta\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{t}_\varphi = -\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{N} = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_z,$$

denn der Normalenvektor zeigt für $\theta = \pi/2$ in die negative *x*-Richtung. Ein Zeitreisender, der also auf dem „Nullmeridian" der Singularität Richtung Äquator marschiert,[8] gelangt also an eine andere Stelle als der, der sich längs des 180°-Meridians bewegt. Währenddessen hat sich das All aber schon weiter ausgedehnt, da sein Radius nicht konstant bleibt, während er sich bewegt. Auch wenn er nach einer 360°-Wanderung wieder an dem Punkt angelangt ist, von dem er losgegangen ist, so hat sich dieser Punkt dennoch radial nach außen bewegt und die Zeit ist nicht mehr die gleiche, sondern eine spätere. Wenn sich also ein Zeitreisender in die Vergangenheit begeben möchte, so darf er sich nicht in Richtung wachsender Winkel θ bewegen, sondern muß versuchen, bei konstantem θ und φ entgegen der Ausbreitungsrichtung des Alls auf der radialen Achse Richtung Zentrum voranzukommen. Das entspricht in obiger Ungleichung dem Fall

$$s^2 = c^2t^2 - z^2 < 0,$$

wobei wir die radiale Ausbreitung in Richtung $(0, 0, z)$ gelegt haben. Wie man sofort sieht, benötigt man hierzu Überlichtgeschwindigkeit $v > c,$ rein um sich entgegen der Ausbreitungsrichtung des Alls vorzuarbeiten. Abgesehen davon würde das Wegelement dadurch imaginär. Was aber, wenn an der Stelle, an der man sein Vorhaben beginnt, eine starke Krümmung der Raumzeit vorliegt, etwa auf dem Rand eines Schwarzen Lochs der Masse m_S ? Dieses hätte dann einen Krümmungsradius $r_S,$ der kleiner ist als der des Universums, aber auch größer als

[8] Das ist natürlich nur in einem Gedankenexperiment möglich.

die Planck-Länge. Folglich wäre es auch vom Alter t_S her jünger als das Universum, aber älter als die Planck-Zeit:

$$t_S = \frac{r_S'}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_S^2}{c^2}}} = \frac{2Gm_S}{c^3}.$$

Die Geschwindigkeit v_S hatte das Universum, als dieses Schwarze Loch seine heutige Masse erreichte. Sein Alter kann man daher in Relation zum gegenwärtigen Alter *t* des Universums setzen:

$$t = \frac{R_S'}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2GM}{c^3}.$$

Dividieren wir t_S durch *t*, so läßt sich wegen $m_S > M_0$ und

$$\frac{t}{t_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{M}{M_0}$$

zeigen, daß

$$t_0 < \frac{m_S}{M_0}t_0 < \frac{M}{M_0}t_0 = t.$$

Bei Erreichen der Lichtgeschwindigkeit sind also definitiv keine Zeitreisen mehr möglich, selbst wenn der Schwarzschildradius $r_S \cong R_S$ noch so groß ist. Wir bleiben also voll und ganz in unserem Universum gefangen. Wenn die Zeitreisen aber schon bei Lichtgeschwindigkeit enden, wie soll das dann erst mit Überlichtgeschwindigkeit möglich sein? Wenn wir also in ein Schwarzes Loch hineingezogen werden, gelangen wir in eine andere Zeit t_S, die vor unserer Zeit *t* datiert. Abgesehen davon, daß uns das Schwarze Loch nicht mehr freigeben würde, würden wir auch nicht mehr in unserer Welt leben, sondern in einer anderen, womit alle Zeitparadoxien aufgehoben wären. Denn aus dieser früheren Welt führt kein Weg in unsere Welt zurück, weil ja im Innern dieses Schwarzen Lochs die gleiche Zeit t_S herrscht wie auf ihrem Ereignishorizont. Wir kommen also weder zurück in die Zeit *t* noch in die Zeit t_S, da auch jedes intrinsische Schwarze Loch beständig an Masse zunimmt und die Zeit damit verrinnt. Wenn es uns aber gelänge, unsere Geschwindigkeit erheblich zu verringern, müßte zugleich die Masse unseres Schwarzen Lochs abnehmen, was aber nicht gelingen kann, da die im Raum befindlichen Schwarzen Löcher in einem expandierenden Universum mitgeführt werden und somit die gleiche Geschwindigkeit haben wie dieses selbst. Somit sind Zeitreisen in unserem Universum nicht möglich,

qed

