

Physikaufgabe 162

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Zeigen Sie, daß sich die Fluktuationen des Vakuums schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Lösung: In der Relativitätstheorie sind die infinitesimalen Weg- und Impulselemente gegeben durch

$$ds = c d\tau \quad \text{bzw.} \quad dp = \frac{1}{c} dE,$$

wobei s der vierdimensionale Weg, τ die Eigenzeit, p der Impuls und E die Energie des Weltalls sind. Ersetzen wir die Differentiale durch Differenzen, so gilt für die Vakuumfluktuationen die Heisenbergsche Unschärferelation im niedrigst möglichen Energiezustand,

$$\Delta s \Delta p = \frac{\hbar}{2},$$

was nach Umformung bedeutet:

$$\Delta s \Delta p = c \Delta \tau \frac{1}{c} \Delta E = \Delta \tau \Delta E = \frac{\hbar}{2}.$$

Entsprechend lauten die Formeln für die Ab- und Zunahme der Eigenzeit und Energie mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem festen Inertialsystem:

$$\tau = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dabei ist $E_0 = m_0 c^2$ die klassische Ruheenergie, welcher die Ruhezeit t_0 entspricht. Die Eigenzeit wird also mit zunehmender Geschwindigkeit v kleiner, die Energie größer. Gemäß unserer Aufgabe [114] können wir Energie und Eigenzeit als quantenmechanische Operatoren darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{E}}{c} &= -\frac{\partial \hbar}{\partial c \tau}, & \hat{p}_x &= -i \frac{\partial \hbar}{\partial x}, & \hat{p}_y &= -i \frac{\partial \hbar}{\partial y}, & \hat{p}_z &= -i \frac{\partial \hbar}{\partial z}, \\ c \hat{\tau} &= \frac{\partial \hbar}{\partial c^{-1} E}, & \hat{x} &= i \frac{\partial \hbar}{\partial p_x}, & \hat{y} &= i \frac{\partial \hbar}{\partial p_y}, & \hat{z} &= i \frac{\partial \hbar}{\partial p_z}. \end{aligned}$$

Mit dem Wirkungsquantum als dem Skalarprodukt zweier Vierervektoren

$$\hbar = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z + \tau E$$

werden alle Größen zu komplexen Größen. Somit lassen sich der vierdimensionale Weg und Impuls durch Vierer-Nabla-Operatoren darstellen,

Physikaufgabe 162

$$\mathbf{s} = \nabla_p \hbar = \left(i \frac{\partial \hbar}{\partial p_x}, i \frac{\partial \hbar}{\partial p_y}, i \frac{\partial \hbar}{\partial p_z}, \frac{\partial \hbar}{\partial c^{-1}E} \right)$$

bzw.

$$\mathbf{p} = -\nabla \hbar = \left(-i \frac{\partial \hbar}{\partial x}, -i \frac{\partial \hbar}{\partial y}, -i \frac{\partial \hbar}{\partial z}, -\frac{\partial \hbar}{\partial c\tau} \right).$$

Aus der Produktsumme der Komponenten der Nabla-Operatoren folgt dann das vierdimensionale Wirkungsquantum

$$\begin{aligned} \hbar = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} &= \nabla_p \hbar \cdot \nabla \hbar = \hat{x} \hat{p}_x + \hat{y} \hat{p}_y + \hat{z} \hat{p}_z + c\hat{\tau} \frac{\hat{E}}{c} \\ &= -i^2 \frac{\partial \hbar}{\partial p_x} \frac{\partial \hbar}{\partial x} - i^2 \frac{\partial \hbar}{\partial p_y} \frac{\partial \hbar}{\partial y} - i^2 \frac{\partial \hbar}{\partial p_z} \frac{\partial \hbar}{\partial z} - \frac{\partial \hbar}{\partial c^{-1}E} \frac{\partial \hbar}{\partial c\tau} \\ &= \frac{\partial \hbar}{\partial p_x} \frac{\partial \hbar}{\partial x} + \frac{\partial \hbar}{\partial p_y} \frac{\partial \hbar}{\partial y} + \frac{\partial \hbar}{\partial p_z} \frac{\partial \hbar}{\partial z} - \frac{\partial \hbar}{\partial E} \frac{\partial \hbar}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Dieses läßt sich als gewöhnliches Skalarprodukt im vierdimensionalen Raum schreiben als

$$\hbar = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z + \tau E,$$

wobei die komponentenweisen Unschärferelationen

$$xp_x = yp_y = zp_z = -\tau E = \frac{\hbar}{2}$$

auch für das Produkt aus Ruheenergie und Ruhezeit gelten,

$$t_0 E_0 = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \tau E = -\frac{\hbar}{2}.$$

Somit sind Ruhezeit und Ruheenergie ineinander konvertierbar:

$$t_0 = -\frac{\hbar}{2E_0} = -\frac{\hbar}{2m_0 c^2},$$

wobei $E_0 < 0$. Wir berechnen nun die totalen Differentiale

$$\Delta \tau = \frac{\partial \tau}{\partial v} \Delta v \quad \text{bzw.} \quad \Delta E = \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v,$$

die neben der Geschwindigkeit v nur noch von der Geschwindigkeitsänderung Δv abhängen. Die partiellen Ableitungen von Eigenzeit und Energie nach der Radialgeschwindigkeit v sind gegeben durch

Physikaufgabe 162

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = -\frac{v}{c^2} \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{v}{c^2} \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^3}.$$

Daraus folgt die relativistische Unschärferelation

$$\Delta \tau \Delta E = \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v^2 = -\frac{v^2}{c^2} \frac{t_0 E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^4} \frac{\Delta v^2}{c^2} = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \frac{\Delta v^2}{c^2} \frac{\hbar}{2}.$$

In jedem Fall muß der Vorfaktor

$$\frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \frac{\Delta v^2}{c^2} = 1$$

sein. Lösen wir diesen Ausdruck nach den Geschwindigkeitsänderung auf, folgt

$$\frac{\Delta v^2}{c^2} = \frac{c^2}{v^2} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 = \left[\frac{c}{v} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^2.$$

Die Unschärfe der Geschwindigkeit, die aus der Unschärfe von Energie und Eigenzeit resultiert, ist raum- und zeitinvariant,

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{c}{v} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c}{v} - \frac{v}{c},$$

d.h. sie gilt im Universum genauso wie im Antiuniversum. Damit ergeben sich die Vakuumfluktuationen von Eigenzeit und Energie zu

$$\Delta \tau = \frac{\partial \tau}{\partial v} \Delta v = -\frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = -t_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\tau$$

bzw.

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial v} \Delta v = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E.$$

Das Produkt von beiden ergibt die Unschärferelation im Vierdimensionalen,

$$\Delta \tau \Delta E = -\tau E = \hbar/2.$$

Physikaufgabe 162

Die Änderungen selbst können so groß werden wie die zugrundeliegenden physikalischen Grundgrößen. Dies ist das ganze Geheimnis der quantenmechanischen Vakuumfluktuationen, die der Allgemeinen Relativitätstheorie zunächst zu widersprechen scheinen. Wir können die Vakuumfluktuationen der besseren Verständlichkeit halber auch wie folgt schreiben:

$$\Delta\tau = -t_0 \sqrt{\frac{v \Delta v}{c \ c}} \quad \text{bzw.} \quad \Delta E = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{v \Delta v}{c \ c}}}.$$

Im Grenzwert, wenn sich v der Lichtgeschwindigkeit nähert und alle Materie zerstrahlt ist, verschwindet nämlich der Ausdruck unter der Wurzel und damit die Eigenzeitfluktuation,

$$\lim_{v \rightarrow c} \frac{v \Delta v}{c^2} = \lim_{v \rightarrow c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0,$$

während die Energiefluktuation ΔE für $v = c$ gegen Unendlich geht. Für $v = 0$ ist

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{v \Delta v}{c^2} = \lim_{v \rightarrow 0} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1$$

und die Eigenzeitfluktuation $\Delta\tau = |-t_0|$ wird maximal,¹ während die Energiefluktuation minimal ist und beim Wert der Ruheenergie liegt, d.h. $\Delta E = E_0$. Unmittelbar vor der Berührung mit Antimaterie, wodurch Strahlung wieder in Materie zurückverwandelt wird, ist die Energiefluktuation am größten und dehnt den Raum nach dessen Verschwinden wieder aus, wobei sie selbst minimal wird. Zu keiner Zeit wird allerdings durch die Ausdehnung des Raums die Lichtgeschwindigkeit innerhalb des sichtbaren Alls überschritten, denn Vakuumfluktuationen sind grundsätzlich quantenmechanischer Natur. Die Informationen werden dabei über beliebige Distanzen durch Quantenteleportation übertragen. Vergewegenwärtigen wir uns dazu die Ruhezeit des Universums

$$t_0 = \frac{\hbar}{2m_0 c^2} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2 \cdot 10^{54} \cdot 2,998^2 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}} = 5,87 \cdot 10^{-74} \text{ s}$$

und die zugehörige Ruheenergie

$$E_0 = m_0 c^2 = 10^{54} \cdot 2,998^2 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} = 8,99 \cdot 10^{38} \text{ J}.$$

In der unvorstellbar kurzen Zeit von $5,9 \cdot 10^{-74} \text{ s}$ wird eine Energie von $9 \cdot 10^{38} \text{ J}$ übertragen,² was einer Ausdehnung des Raums mit Überlichtgeschwindigkeit entspräche,

¹ Unter einem maximalen Wert darf man sich nur nicht zwangsläufig eine große Zahl vorstellen.

² teleportiert

Physikaufgabe 162

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{c} = \lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c} \right) = \infty.$$

Nur dadurch ist allerdings ein Urknall überhaupt möglich. Das ist auch der Grund, warum das Universum ein inflationäres Szenario entwickeln kann, welches in Bruchteilen von $1/10^{74}$ s zur Aufspannung eines neuen Universums führt. Die Allgemeine Relativitätstheorie könnte das alleine nicht leisten, da sie keine Überlichtgeschwindigkeit zuläßt; dies ist nur in Verbindung mit der Quantenmechanik möglich. Beim Urknall stoßen sich Materie und Antimaterie nämlich ab, und auch das ist wiederum nur möglich, weil sich zwei Universen nicht gegenseitig überlappen. Daß sich der Raum aufspannt, heißt allerdings nicht, daß er sofort homogen mit Materie erfüllt wäre. Die Materie muß erst aus der Punktsingularität hervorquellen und sich mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnen, um den zunächst noch leeren Raum auszufüllen; denn nur durch Ausdehnung des Universums kann sich die Materie später abkühlen. Wir sehen also aufgrund der Quantenteleportation die anderen Galaxien nicht, wie sie vor 13,8 Milliarden Jahren ausgesehen haben,³ sondern wir sehen sie, wie sie heute aussehen, weil wir alle derselben Singularität entsprungen sind.⁴ Wir brauchen also keine weiteren 13,8 Milliarden Jahre warten, denn dann wäre unser Planet ohnehin längst von der sich zu einem roten Riesen aufblähenden Sonne verschlungen worden.

³ Was nach der Speziellen Relativitätstheorie zwar richtig wäre, nicht aber nach der Quantentheorie

⁴ Einige früher, andere später