Aufgabe: Parametrisieren Sie Universum und Antiuniversum und zeigen Sie, daß diese sich nur zum Zeitpunkt des Urknalls berühren können.

Lösung: Innerhalb des Alls darf es zu keinen Überschneidungen zwischen den Singularitäten einerseits und dem sichtbaren All und den Singularitäten andererseits kommen. Mithin gilt aufgrund der Massenerhaltung für die Masse M des Universums bei einem Schwarzschildradius R_S und konstanter Oberflächendichte σ die Bilanzgleichung

$$M = 4\pi\sigma R_S^2 = 4\pi\sigma\left(R_S^2 - r_R^2\right) + 4\pi\sigma\left(r_R^2 - r_P^2\right) + 4\pi\sigma r_P^2.$$

Daraus ergibt sich nach Umformung für die Quadratsumme der Radien der Ausdruck

$$R_S^2 = \left(R_S^2 - r_R^2\right) + \left(r_R^2 - r_P^2\right) + r_P^2 = r_R^2 + \left(R_S^2 - r_R^2 - r_P^2\right) + r_P^2.$$

Der Schwarzschildradius setzt sich also aus drei Beträgen zusammen,

$$R_S^2 = R_S^2 f_R^{2n} + R_S^2\left(1 - f_R^{2n} - f_P^{2n}\right) + R_S^2 f_P^{2n} = R_S^2\left(f_R^{2n} + \left(1 - f_R^{2n} - f_P^{2n}\right) + f_P^{2n}\right),$$

mit den Radien für Punkt- und Randsingularität r_P bzw. r_R sowie sichtbarem Universum r_U :

$$r_P = R_S f_P^n, \quad r_R = R_S f_R^n, \quad r_U = R_S\sqrt{1 - f_R^{2n} - f_P^{2n}}.$$

Da der folgende Zusammenhang aufgrund des binomischen Satzes bekannt ist,

$$\left(f_R^2 + f_P^2\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f_R^{2(n-k)} f_P^{2k} = f_R^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f_R^{2(n-k)} f_P^{2k} + f_P^{2n},$$

wird eine Lösung gesucht, für die gilt: $f_R^2 + f_P^2 = 1,$ denn dann ist

$$1 - f_R^{2n} - f_P^{2n} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} f_R^{2(n-k)} f_P^{2k},$$

wobei $n \geq 2$ sein muß. Für $n = 2$ erhalten wir mit $1 - f_R^4 - f_P^4 = 2 f_R^2 f_P^2$ den Radius des sichtbaren Alls zu

$$r_U = R_S\sqrt{2 f_R^2 f_P^2} = \sqrt{2} R_S f_R f_P,$$

womit im All wegen

$$R_S^2 = R_S^2\left(f_R^4 + 2 f_R^2 f_P^2 + f_P^4\right) = R_S^2\left(f_R^2 + f_P^2\right)^2$$

bzw. $R_S = R_S f_R^2 + R_S f_P^2$ allerdings kein Platz für ein sichtbares Universum bleibt. Wir suchen daher nach einem Ausdruck, für den

$$R_S = r_R + \left(R_S - r_R - r_P\right) + r_P = R_S\, f_R^n + R_S\left(1 - f_R^n - f_P^n\right) + R_S\, f_P^n$$

gilt, also probieren wir es mit $n = 4.$ Damit haben wir Glück, denn es ist

$$R_S = R_S\, f_R^4 + R_S\left(1 - f_R^4 - f_P^4\right) + R_S\, f_P^4 = R_S\left(f_R^4 + 2\, f_R^2\, f_P^2 + f_P^4\right).$$

Wie man leicht sieht, erfüllt die Parametrisierung

$$r_P = R_S \sin^4\frac{\varphi}{4}, \quad r_R = R_S \cos^4\frac{\varphi}{4}, \quad r_U = R_S\left(1 - \cos^4\frac{\varphi}{4} - \sin^4\frac{\varphi}{4}\right)$$

aufgrund der Identität

$$1 = \left(\sin^2\frac{\varphi}{4} + \cos^2\frac{\varphi}{4}\right)^2 = \sin^4\frac{\varphi}{4} + 2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4} + \cos^4\frac{\varphi}{4}$$

die obige Forderung, so daß wir nach Umformung einen positiven Radius für das sichtbare All erhalten:

$$R_S = r_R + \left(R_S - r_R - r_P\right) + r_P = R_S \cos^4\frac{\varphi}{4} + 2R_S \sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4} + R_S \sin^4\frac{\varphi}{4}.$$

Das gilt für jeden beliebigen Radius, also auch nach einer halben Periode im Torus,

$$\begin{aligned} R_S\left(\pi\right) &= R_S \cos^4\frac{\pi}{4} + 2R_S \sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4} + R_S \sin^4\frac{\pi}{4} \\ &= R_S\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right\} = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)R_S = R_S. \end{aligned}$$

Somit scheint die Parametrisierung

$$r_P\left(\varphi\right) = R_S \sin^4\frac{\varphi}{4}, \quad r_R\left(\varphi\right) = R_S \cos^4\frac{\varphi}{4}, \quad r_U\left(\varphi\right) = 2R_S \sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}$$

geeignet, das sichtbare All und die beiden Singularitäten wie gewünscht zu beschreiben.

Wir nehmen im folgenden an, daß der innere Radius des Universums quadratisch mit dem Sinus des viertelten Drehwinkels φ in der *x*-*y*-Ebene zunimmt, d.h.

$$r_P = R_S \sin^4\frac{\varphi}{4}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Toruskoordinaten ein,

$$x\left(\varphi,\theta\right) = \left(R_S + r_P\cos\theta\right)\cos\varphi, \quad y\left(\varphi,\theta\right) = \left(R_S + r_P\cos\theta\right)\sin\varphi, \quad z\left(\varphi,\theta\right) = r_P\sin\theta,$$

ergeben sich für die Oberfläche der Punktsingularität die Koordinaten

$$x_P = R_S\left(1+\sin^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\right)\cos\varphi,$$

$$y_P = R_S\left(1+\sin^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\right)\sin\varphi,$$

$$z_P = R_S\sin^4\frac{\varphi}{4}\sin\theta.$$

Für das gespiegelte Antiuniversum haben wir hingegen nach Drehung um den Winkel π folgende Koordinaten:

$$\overline{x}_P = R_S\left(1+\sin^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos\left(\theta+\pi\right)\right)\cos\left(\varphi+\pi\right) = -R_S\left(1-\sin^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\right)\cos\varphi,$$

$$\overline{y}_P = R_S\left(1+\sin^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos\left(\theta+\pi\right)\right)\sin\left(\varphi+\pi\right) = -R_S\left(1-\sin^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\right)\sin\varphi,$$

$$\overline{z}_P = R_S\sin^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\sin\left(\theta+\pi\right) = -R_S\sin^4\frac{\varphi}{4}\sin\theta.$$

Die Koordinaten der Randsingularität erhalten wir aus den zu einer Kugel um den Koordinatennullpunkt entarteten Toruskoordinaten

$$x\left(\varphi,\theta\right) = r_R\cos\theta\cos\varphi,\quad y\left(\varphi,\theta\right) = r_R\cos\theta\sin\varphi,\quad z\left(\varphi,\theta\right) = r_R\sin\theta.$$

Setzen wir den Radius wieder ein, ergibt sich

$$x_R = R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\cos\varphi,$$

$$y_R = R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\sin\varphi,$$

$$z_R = R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\sin\theta.$$

Die gespiegelten Koordinaten des Antiuniversums lauten somit:

$$\overline{x}_R = R_S\cos^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos\left(\theta+\pi\right)\cos\left(\varphi+\pi\right) = R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\cos\varphi,$$

$$\overline{y}_R = R_S\cos^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos\left(\theta+\pi\right)\sin\left(\varphi+\pi\right) = R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\cos\theta\sin\varphi,$$

$$\overline{z}_R = R_S\cos^4\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\sin\left(\theta+\pi\right) = -R_S\cos^4\frac{\varphi}{4}\sin\theta,$$

und die Koordinaten des sichtbaren Universums erhalten wir ebenfalls aus entarteten Toruskoordinaten:

$$x\left(\varphi,\theta\right) = r_U\cos\theta\cos\varphi,\quad y\left(\varphi,\theta\right) = r_U\cos\theta\sin\varphi,\quad z\left(\varphi,\theta\right) = r_U\sin\theta.$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
x_U &= 2R_S \sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}R_S\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\theta\cos\varphi,\\
y_U &= 2R_S \sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}R_S\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\theta\sin\varphi,\\
z_U &= 2R_S \sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\sin\theta = \frac{1}{2}R_S\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Das sichtbare Antiuniversum wird nach Spiegelung am Ursprung bzw. Drehung um π durch folgende Koordinaten beschrieben:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_U &= 2R_S\sin^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos(\theta+\pi)\cos(\varphi+\pi)\\
&= 2R_S\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\cos\theta\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{y}_U &= 2R_S\sin^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos(\theta+\pi)\sin(\varphi+\pi)\\
&= 2R_S\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\cos\theta\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\overline{z}_U = 2R_S\sin^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\cos^2\left(\frac{\varphi}{4}+\pi\right)\sin(\theta+\pi) = -2R_S\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\sin\theta.
$$

Insgesamt superponieren alle Koordinaten wieder zu den obengenannten Toruskoordinaten:

$$
\begin{aligned}
x &= x_P + x_R + x_U\\
&= R_S\left(1+\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\theta\right)\cos\varphi\\
&= R_S\left(1+\left(\sin^2\frac{\varphi}{4}+\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)^2\cos\theta\right)\cos\varphi = R_S\left(1+\cos\theta\right)\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= y_P + y_R + y_U\\
&= R_S\left(1+\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\theta\right)\sin\varphi\\
&= R_S\left(1+\left(\sin^2\frac{\varphi}{4}+\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)^2\cos\theta\right)\sin\varphi = R_S\left(1+\cos\theta\right)\sin\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
z = z_P + z_R + z_U = R_S\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\sin\theta = R_S\sin\theta.
$$

Das Antiuniversum besitzt demgemäß die gespiegelten Gleichungen

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \overline{x}_P + \overline{x}_R + \overline{x}_U \\ &= R_S\left(-1+\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\theta\right)\cos\varphi \\ &= R_S\left(-1+\cos\theta\right)\cos\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \overline{y}_P + \overline{y}_R + \overline{y}_U \\ &= R_S\left(-1+\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\theta\right)\sin\varphi \\ &= R_S\left(-1+\left(\sin^2\frac{\varphi}{4}+\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)^2\cos\theta\right)\sin\varphi = R_S\left(-1+\cos\theta\right)\sin\varphi,\end{aligned}$$

$$\overline{z} = \overline{z}_P + \overline{z}_R + \overline{z}_U = -R_S\left(\sin^4\frac{\varphi}{4}+\cos^4\frac{\varphi}{4}+2\sin^2\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\sin\theta = -R_S\sin\theta.$$

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse haben wir das Universum inklusive seiner Singularitäten sowie das komplette Antiuniversum in den Abbildungen 1-12 dargestellt. Die Abbildungen 1-4 zeigen die Punkt- und Randsingularitäten der beiden Universen sowie das sichtbare All und das Antiuniversum in den jeweiligen Quadranten. Da die Randsingularitäten und die sichtbaren Universen punktsymmetrisch sind, haben sie lediglich entgegengesetzte *z*-Komponenten, während sich die *x*- und *y*-Koordinaten nicht unterscheiden. Das sichtbare Universum befindet sich eigentlich zwischen den Singularitäten, wir haben es aber im Zentrum plaziert, weil es sich sonst als Fläche nicht darstellen läßt. Dadurch kommt es optisch zu den unschönen Überschneidungen wie in Abb. 2 und 4. In Abb. 4 wurden die Randsingularitäten des Universums und Antiuniversums nicht dargestellt. In den Abbildungen 5-8 haben wir uns ganz auf das Universum beschränkt, um mehr Details einsehen zu können, und zusätzlich den Ereignishorizont eingefügt. Die Abbildungen 9 und 10 zeigen die begrenzende Punktsingularität für Universum und Antiuniversum in allen Quadranten. Diese Graphiken sind vierdimensional, wobei die vierte Dimension durch die Veränderung der Größe und die Lageänderung innerhalb des Ereignishorizonts zum Ausdruck kommt. Aufgrund der Spiegelung am Koordinatenursprung ändert sich zusätzlich zur 180°-Drehung auch die Bewegungsrichtung. Das Antiuniversum läuft wie von Stephen Hawking vorgeschlagen rückwärts. Das kann zur Folge haben, daß sich unser nächstes Leben rückwärts abspielt. In den Graphiken 10 und 11 kommt es nur im 4. Quadranten zu einer Berührung der Singularitäten. Dieses Ereignis löst den Urknall aus. Zu allen anderen Zeitpunkten ist uns der Zutritt zum Antiuniversum verwehrt, weil nichts über die Punktsingularitäten hinausgelangen kann.

Addiert man alle Massen im Universum, ergibt sich ein Torus. Entsprechendes gilt auch für das Antiuniversum. Beide beschreiben denselben Radius, ohne sich jemals zu begegnen, außer zum Zeitpunkt des Urknalls, welcher sich im Universum zur Zeit $t=0$ und im Antiuniversum zur Zeit $t=-T_S/2$ ereignet, genau um den Winkel π phasenverschoben. Zeit ist also nicht gleich Zeit, da wir zur Zeit des Antiuniversums stets die halbe Schwarzschildzeit addieren müssen, um in unsere Zeit zu gelangen. Es mag zunächst grotesk anmuten, daß sich ein Zusammenstoß mit Antimaterie nicht zur selben Zeit ereignen kann, aber die Gleichungen lassen keine andere

Schlußfolgerung zu. Ursache dessen ist ganz einfach die Lichtgeschwindigkeit. Bis das Licht den Rand des Universums und damit den Ort des Zusammenstoßes erreicht hat, ist ja bereits eine halbe Weltzeit vergangen, da der Radiusvektor aus dem Zentrum hervorgeht. Insgesamt legen beide den Winkel 2π zurück, bis sie aufeinandertreffen, und ein voller Umlaufwinkel entspricht derselben Zeit wie zu Beginn des Universums. Ebendeswegen haben wir den Radius auf den Wert $\sin(\varphi/4)$ normiert, und damit hat alles seine Richtigkeit.

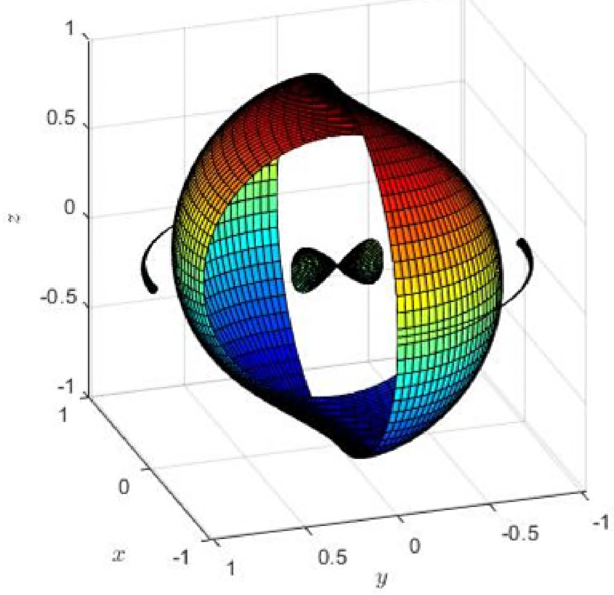

Abbildung 1. Punkt- und Randsingularität und sichtbares All von Universum und Antiuniversum (1. Quadrant)

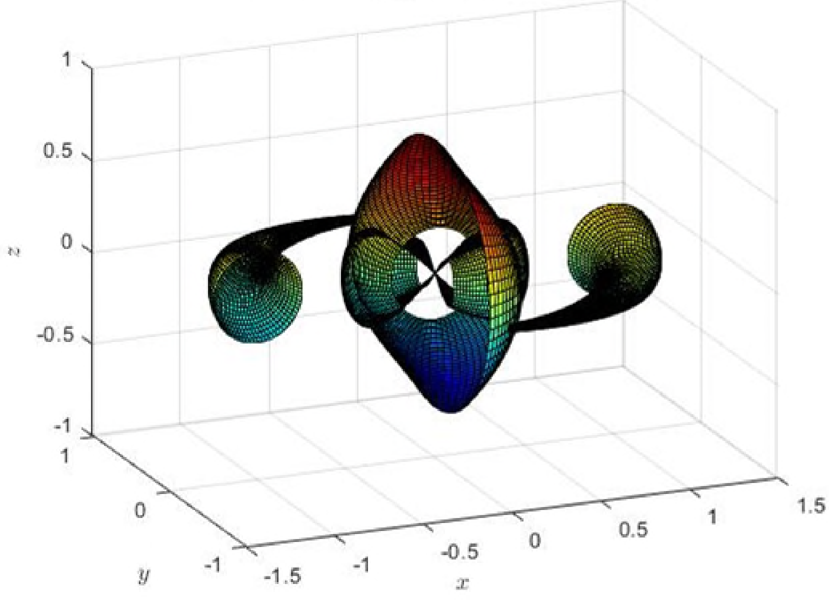

Abbildung 2. Punkt- und Randsingularität und sichtbares All von Universum und Antiuniversum (2. Quadrant)

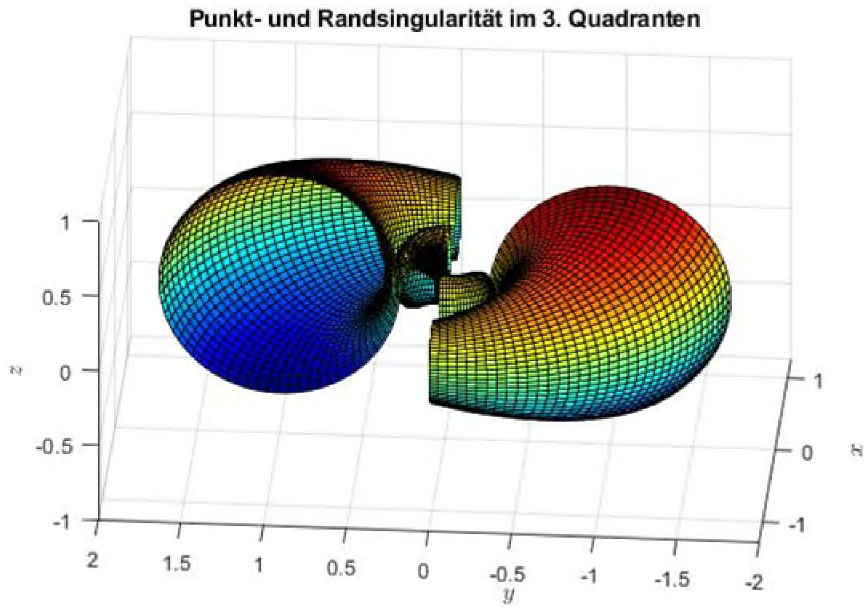

Abbildung 3. Punkt- und Randsingularität und sichtbares All von Universum und Antiuniversum (3. Quadrant)

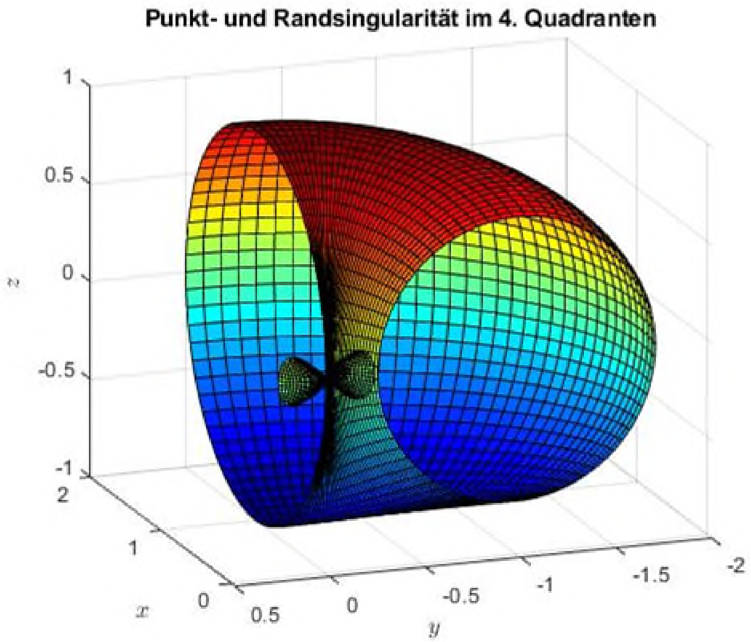

Abbildung 4. Punktsingularität und sichtbares All von Universum und Antiuniversum (4. Quadrant)

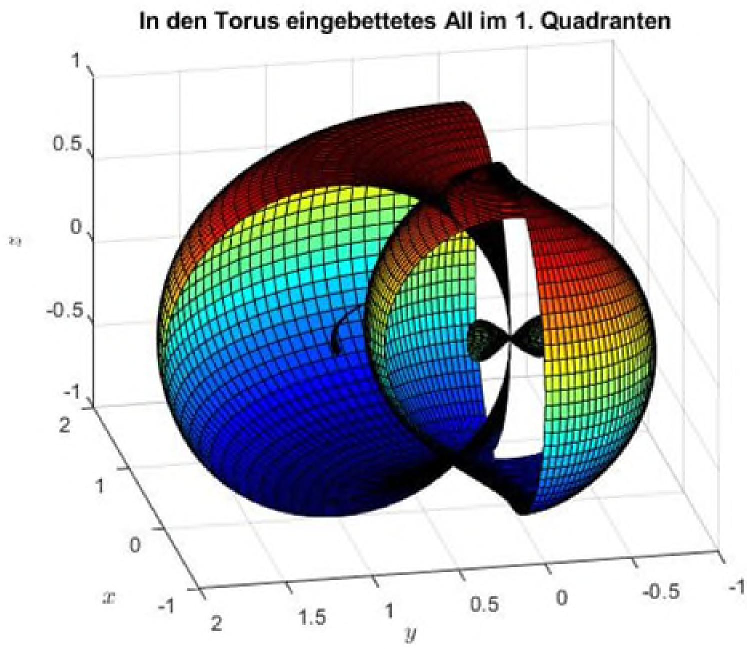

Abbildung 5. Sichtbares All, Punkt- und Randsingularität und Ereignishorizont des Universums (1. Quadrant)

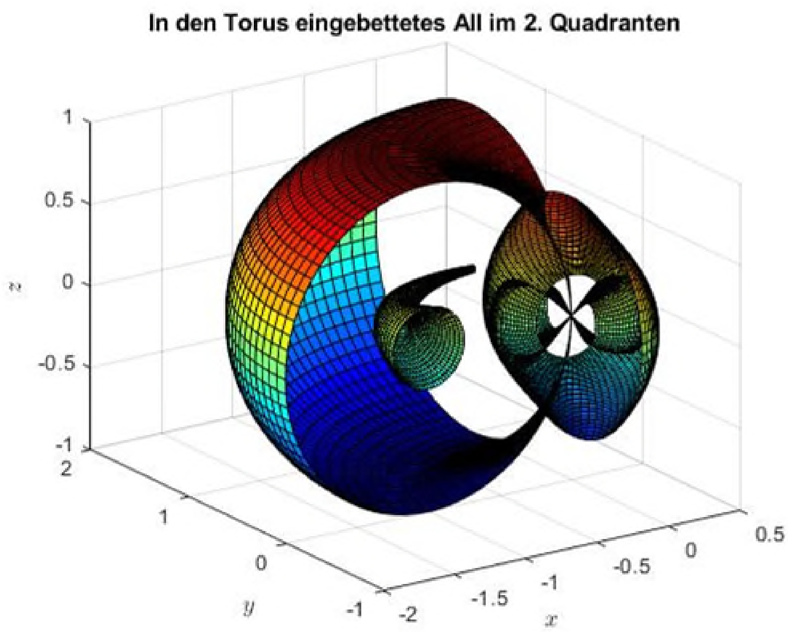

Abbildung 6. Sichtbares All, Punkt- und Randsingularität und Ereignishorizont des Universums (2. Quadrant)

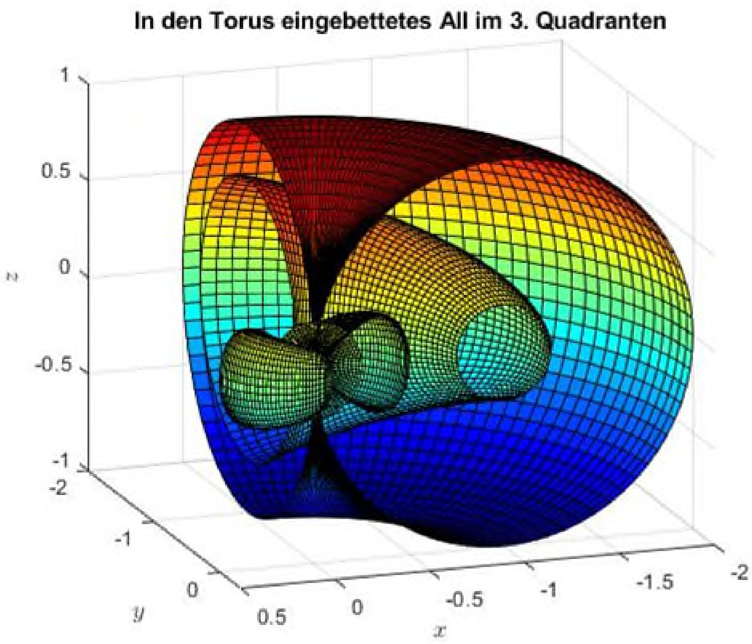

Abbildung 7. Sichtbares All, Punkt- und Randsingularität und Ereignishorizont des Universums (3. Quadrant)

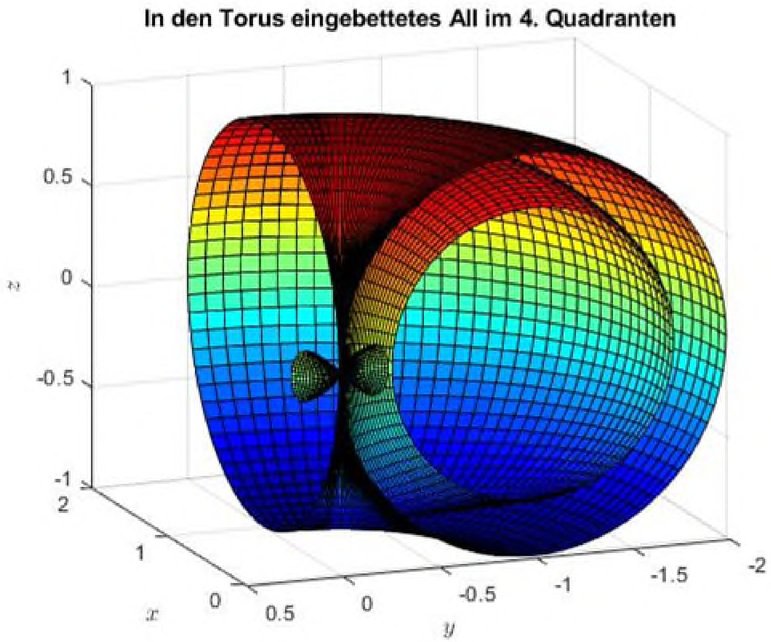

Abbildung 8. Sichtbares All, Punkt- und Randsingularität und Ereignishorizont des Universums (4. Quadrant)

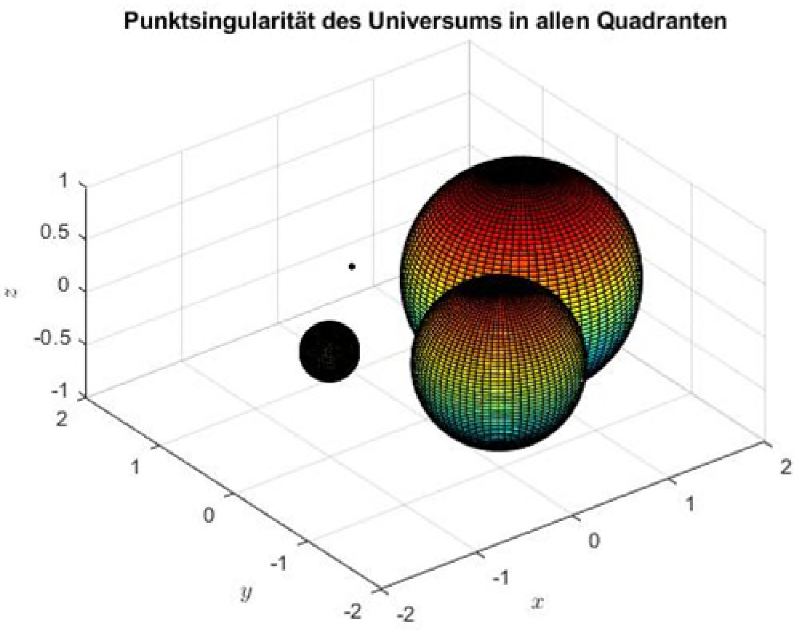

Abbildung 9. Vierdimensionale Punktsingularität des Universums in allen Quadranten

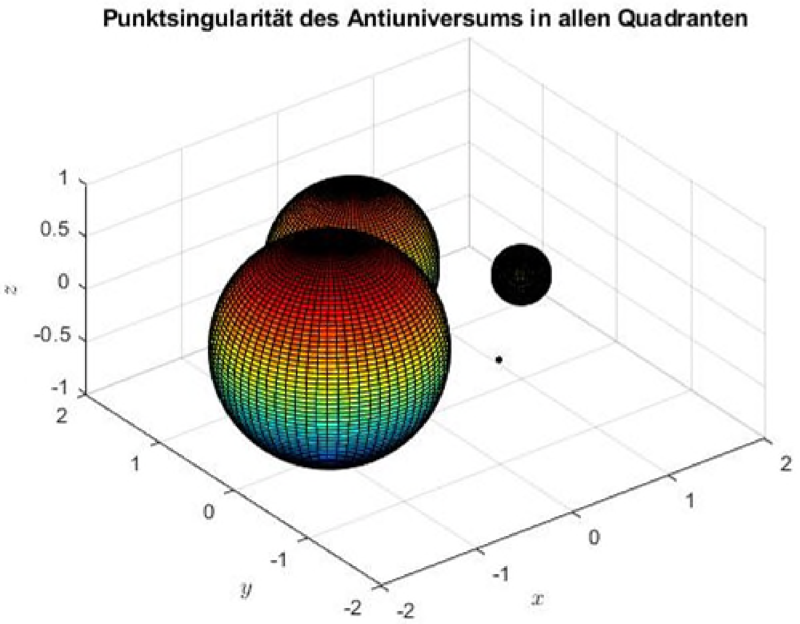

Abbildung 10. Vierdimensionale Punktsingularität des Antiuniversums in allen Quadranten

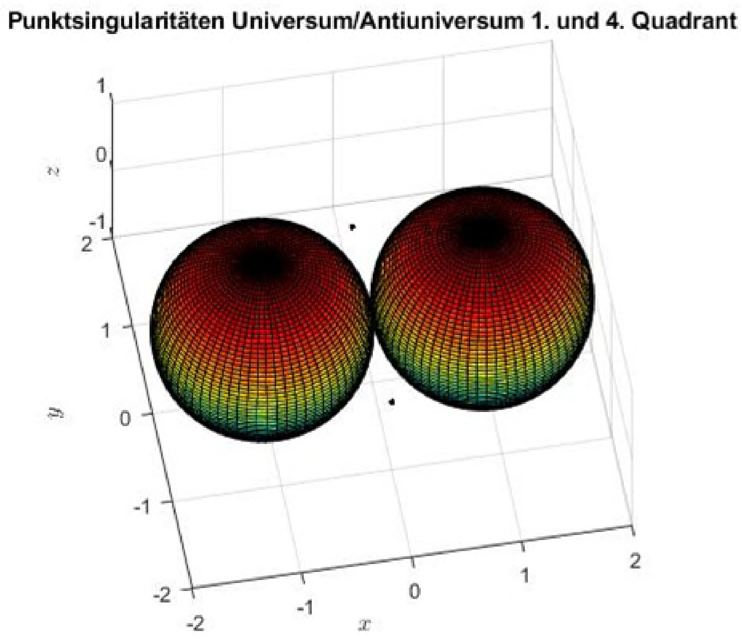

Abbildung 11. Punktsingularitäten von Universum und Antiuniversum im 1. und 4. Quadranten

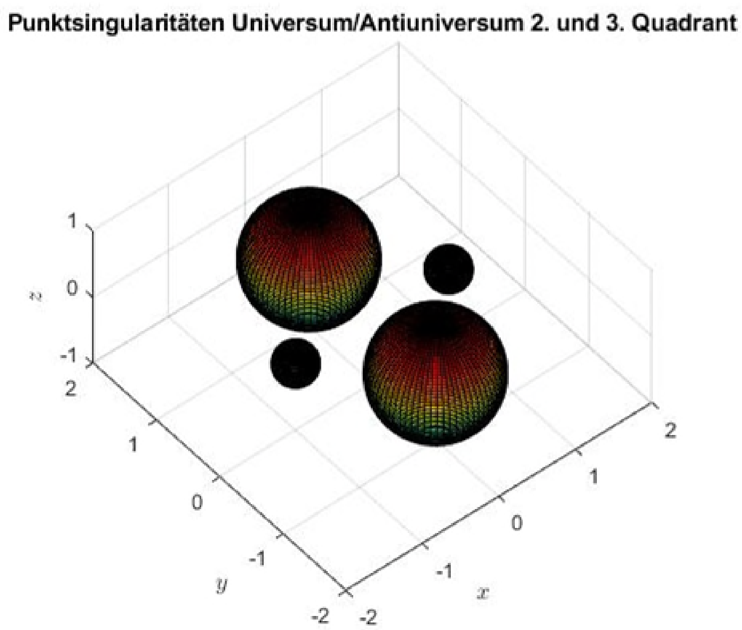

Abbildung 12. Punktsingularitäten von Universum und Antiuniversum im 2. und 3. Quadranten

Anhang

```
% Programm zur Veranschaulichung der Singularitäten des Alls
clear all

R=1;
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,pi/2,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);

% Punktsingularität im 1. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
figure(1)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punkt- und Randsingularität im 1. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Randsingularität im 1. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität des Antiuniversums im 1. Quadranten
x=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=-R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Sichtbares Universum im 1. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% 2. Quadrant
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(pi/2,pi, 36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
% Punktsingularität im 2. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
figure(2)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punkt- und Randsingularität im 2. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
```



```
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Randsingularität im 2. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität des Antiuniversums im 2. Quadranten
x=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=-R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Sichtbares Universum im 2. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% 3. Quadrant
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(pi,3*pi/2, 36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);

% Punktsingularität im 3. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
figure(3)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punkt- und Randsingularität im 3. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Randsingularität im 3. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität des Antiuniversums im 3. Quadranten
x=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=-R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Sichtbares Universum im 3. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
```

```
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% 4. Quadrant
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(3*pi/2,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);

% Punktsingularität im 4. Quadranten

x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
figure(4)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punkt- und Randsingularität im 4. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Randsingularität im 4. Quadranten
% x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
% y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
% z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
% hold on
% surf(x,y,z);

% Randsingularität des Antiuniversums im 4. Quadranten
% x=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
% y=-(R-R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
% z=-R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
% hold on
% surf(x,y,z);

% Sichtbares Universum im 4. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 5
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,pi/2,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(5)

% Universum im 1. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('In den Torus eingebettetes All im 1. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
```



```
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 1. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität im 1. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Torus im 1. Quadranten
x=R.*(1+cos(Theta)).*cos(Phi);
y=R.*(1+cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 6
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(pi/2,pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(6)

% Universum im 2. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('In den Torus eingebettetes All im 2. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 2. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität im 2. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Torus im 2. Quadranten
x=R.*(1+cos(Theta)).*cos(Phi);
```



```
y=R.*(1+cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 7
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(pi,3*pi/2,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(7)

% Universum im 3. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('In den Torus eingebettetes All im 3. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 3. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität im 3. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Torus im 3. Quadranten
x=R.*(1+cos(Theta)).*cos(Phi);
y=R.*(1+cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 8
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(3*pi/2,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(8)

% Universum im 4. Quadranten
x=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=(1/2).*R.*sin(Phi/2).^2.*cos(Theta).*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('In den Torus eingebettetes All im 4. Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
```



```
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
% axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 4. Quadranten
x=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*sin(Phi/4).^4.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Randsingularität im 4. Quadranten
x=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*cos(Phi/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*cos(Phi/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Torus im 4. Quadranten
x=R.*(1+cos(Theta)).*cos(Phi);
y=R.*(1+cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 9
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(9)

% Punktsingularität im 0. Quadranten
alpha=0;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punktsingularität des Universums in allen Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 1. Quadranten
alpha=pi/2;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 2. Quadranten
alpha=pi;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);
```



```
% Punktsingularität im 3. Quadranten
alpha=3*pi/2;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 4. Quadranten
alpha=2*pi;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 10
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(10)

% Punktsingularität im 0. Quadranten
alpha=0;
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punktsingularität des Antiuniversums in allen Quadranten')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Punktsingularität im 1. Quadranten
alpha=pi/2;
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 2. Quadranten
alpha=pi;
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=-R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 3. Quadranten
alpha=3*pi/2;
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);
```



```
% Punktsingularität im 4. Quadranten
alpha=2*pi;
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 11
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(11)

% Punktsingularität im 1. Quadranten
% Universum
alpha=pi/2;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punktsingularitäten Universum/Antiuniversum 1. und 4. Quadrant')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Antiuniversum
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 4. Quadranten
% Universum
alpha=2*pi;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Antiuniversum
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Abbildung 12
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);
figure(12)

% Punktsingularität im 1. Quadranten
```



```
% Universum
alpha=pi;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Punktsingularitäten Universum/Antiuniversum 2. und 3. Quadrant')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$z$','interpreter','latex')
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Antiuniversum
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);

% Punktsingularität im 3. Quadranten
% Universum
alpha=3*pi/2;
x=R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
surf(x,y,z);
axis([-2 2 -2 2 -1 1])

% Antiuniversum
x=-R.*cos(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=-R.*sin(alpha)+R.*sin(alpha/4).^4.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*sin(alpha/4).^4.*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);
```

