

## Physikaufgabe 158

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Parametrisieren Sie die Raumzeit und widerlegen Sie damit die Ansicht, wonach sich der Raum mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreitet.

**Lösung:** Weil sich das Weltall ausdehnt, aber dennoch von einer endlichen Masse ausgefüllt ist, läßt es sich nicht durch eine einzige Singularität mit konstantem Schwarzschildradius  $R_S$  erklären. Es muß daher mindestens zwei Singularitäten geben, die wir nachfolgend als Punkt- und Randsingularität bezeichnen, derart, daß sich das Weltall in zwei Anteile zerlegen läßt, nämlich in eine Punktsingularität mit expansionsabhängigem Radius  $r$  und eine Randsingularität mit kontraktionsabhängigen Radius  $R_S - r$ . Da die Radien nicht überlappen können, gilt die Beziehung

$$r + (R_S - r) \leq R_S.$$

Tatsächlich ist das Gleichheitszeichen nur in einem einzigen Raumzeitpunkt erfüllt, und zwar während des Urknalls. Bei räumlich homogener Oberflächendichte  $\sigma$  setzt sich die Masse  $M$  ebenfalls aus zwei Beiträgen zusammen, den Massen der beiden Singularitäten,

$$M = M_P + M_R.$$

Ferner gilt für das Universum die Massenerhaltung zu jedem Zeitpunkt seiner Ausdehnung:

$$M = 4\pi\sigma \left[ r^2 + (R_S - r)^2 \right] = 4\pi\sigma \left[ R_S^2 - 2r(R_S - r) \right] \leq 4\pi\sigma R_S^2$$

Das Gleichheitszeichen gilt daher sowohl für  $r = 0$  als auch für  $r = R_S$ , und das Minimum der Masse liegt wegen

$$M'(r) = 8\pi\sigma (2r - R_S) = 0$$

und  $M'' = 16\pi\sigma > 0$  bei  $r = R_S/2$ . An dieser Stelle ist die Masse  $M = 2\pi\sigma R_S^2$  der Singularitäten gerade einhalbmal so groß wie bei maximaler Ausdehnung oder zu Beginn des Universums. Da diese Masse jedoch nicht verschwunden sein kann, steckt sie im sichtbaren Teil des Universums zwischen den Singularitäten. Die Masse des sichtbaren Universums nimmt also bis zu einem Maximum zu, danach nimmt sie wieder ab. Auf den aus der Massenerhaltung abgeleiteten Widerspruch

$$R_S - r \neq \sqrt{R_S^2 - r^2} = \sqrt{(R_S - r)(R_S + r)} = (R_S - r) \sqrt{\frac{R_S + r}{R_S - r}} > R_S - r$$

wollen wir bei der nachfolgenden Parametrisierung jedoch nicht eingehen, weil dieser durch überlappende Schwarzschildradien<sup>1</sup> die Existenz des sichtbaren Universums in Frage stellen

---

<sup>1</sup> Die Radien müssen in der Tat kleiner sein als angenommen.

## Physikaufgabe 158

würde. Wir nehmen im folgenden an, daß der innere Radius linear mit dem Drehwinkel  $\varphi$  in der  $x$ - $y$ -Ebene zunimmt, d.h.

$$r(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} R_S.$$

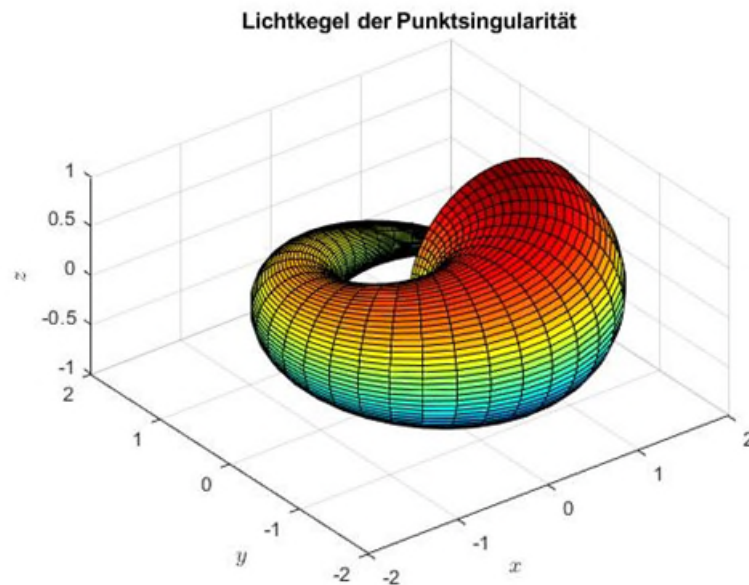
Setzen wir diesen anwachsenden Radius in die Toruskoordinaten

$$\begin{aligned}x(\varphi, \theta) &= (R_S + r \cos \theta) \cos \varphi, \\y(\varphi, \theta) &= (R_S + r \cos \theta) \sin \varphi, \\z(\varphi, \theta) &= r \sin \theta\end{aligned}$$

ein, ergeben sich die Koordinaten der Punktsingularität (Abb. 1):

$$\begin{aligned}x_p &= R_S \left( 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \cos \theta \right) \cos \varphi, \\y_p &= R_S \left( 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \cos \theta \right) \sin \varphi, \\z_p &= R_S \frac{\varphi}{2\pi} \sin \theta,\end{aligned}$$

wobei  $\theta \in [0, 2\pi]$  der Winkel senkrecht zur  $x$ - $y$ -Ebene in Richtung der  $z$ -Achse ist.<sup>2</sup>



<sup>2</sup> Die vierte Dimension ist die radiale Ausdehnung des Raums, die sich in der zeitlichen Zunahme des Schwarzschildradius der Punktsingularität bemerkbar macht.

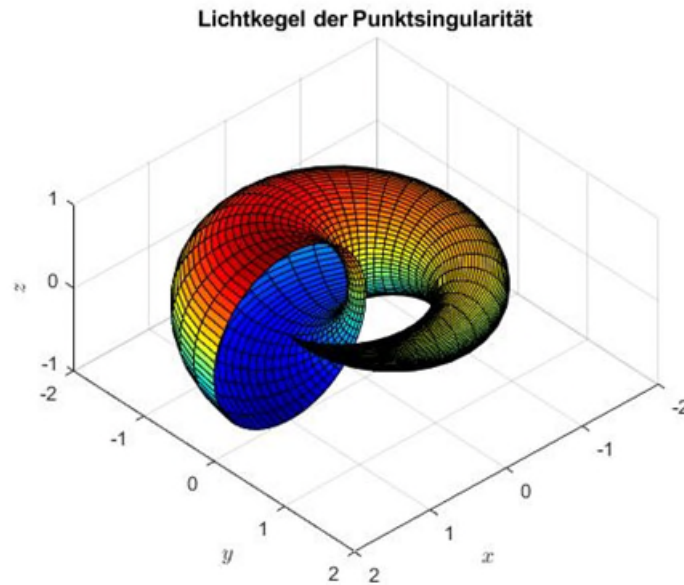


Abbildung 1. Die Punktsingularität aus zwei verschiedenen Perspektiven

Für  $\varphi = 2\pi$ , d.h. nach einer vollen Umdrehung, gilt  $r = R_S$  und wir erhalten einen Kreis in der  $x$ - $z$ -Ebene mit Mittelpunkt  $(R_S, 0)$ ,

$$(x_P - R_S)^2 + z_P^2 = R_S^2 \cos^2 \theta + R_S^2 \sin^2 \theta = R_S^2.$$

Für die Randsingularität des Antiuniversums gilt das gleiche (siehe Abb. 2).

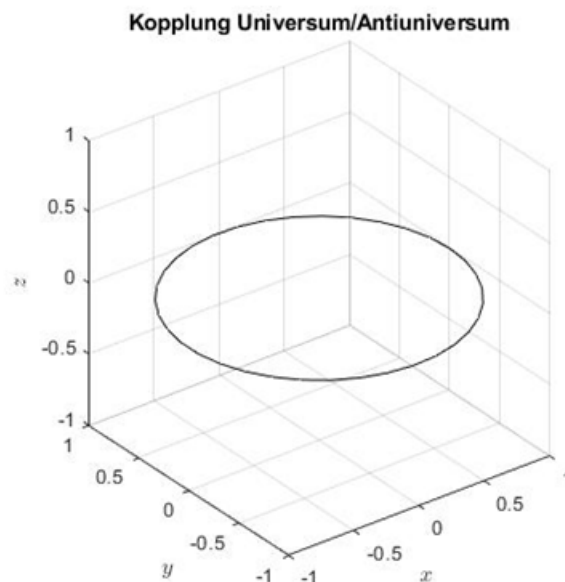


Abbildung 2. Beim Urknall kollidiert die Punktsingularität des Universums mit der Randsingularität des Antiuniversums, wobei sie sich gegenseitig auslöschen

Die Koordinaten der Randsingularität (Abb. 3) erhalten wir, indem wir die Koordinaten der Punktsingularität vom konstanten Schwarzschildradius des Universums abziehen:

## Physikaufgabe 158

$$x_R = x - x_P = R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y_R = y - y_P = R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z_R = z - z_P = R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \sin \theta.$$

Addieren wir die Koordinaten von Punkt- und Randsingularität,

$$x_P + x_R = R_S \left( 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \cos \theta \right) \cos \varphi + R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y_P + y_R = R_S \left( 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \cos \theta \right) \sin \varphi + R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \cos \theta \sin \varphi,$$

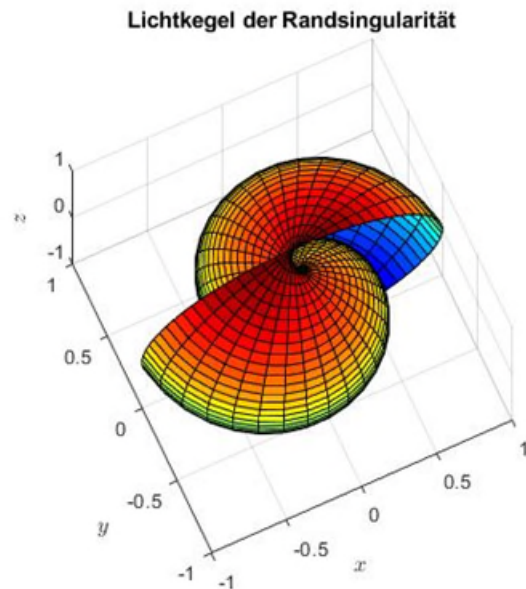
$$z_P + z_R = R_S \frac{\varphi}{2\pi} \sin \theta + R_S \left( 1 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \sin \theta,$$

erhalten wir den lochfreien Torus (Abb. 4) mit  $r(\varphi) = R_S$ ,

$$x(\varphi, \theta) = R_S (1 + \cos \theta) \cos \varphi,$$

$$y(\varphi, \theta) = R_S (1 + \cos \theta) \sin \varphi,$$

$$z(\varphi, \theta) = R_S \sin \theta.$$



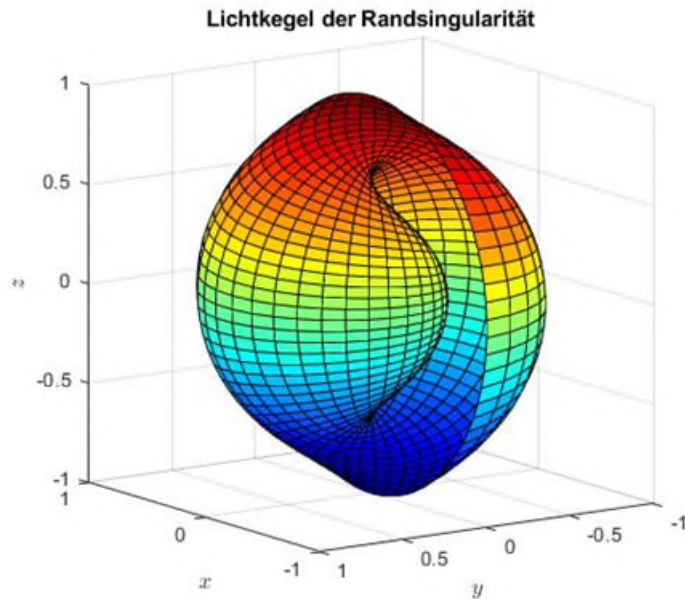


Abbildung 3. Die Randsingularität aus zwei verschiedenen Perspektiven

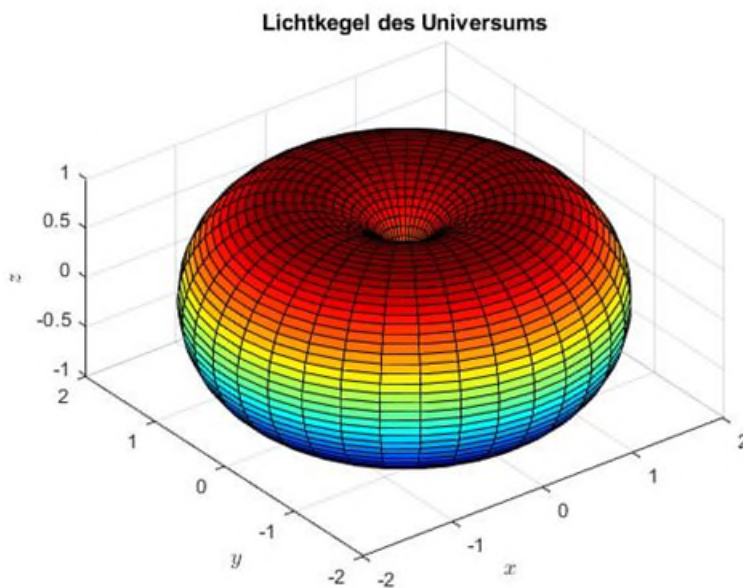


Abbildung 4. Die Überlagerung von Punkt- und Randsingularität des Alls stellt einen Torus dar

Die Punktsingularität (grün) entsteht, wie in Abb. 5 schematisch dargestellt, auf dem Rand der Randsingularität (rot). Die Massenzunahme erfolge im mathematischen positiven Drehsinn.<sup>3</sup> Bei getrennter Darstellung der zeitlichen Entwicklung, d.h. ohne Überlagerung, ergeben sich die Verhältnisse in Abb. 6. Die Massen sind dabei auf den Oberflächen der jeweiligen Singularitäten konzentriert, wobei das sichtbare All den Raum dazwischen ausfüllt. Gemäß der eingangs formulierten Überlegungen erreicht das sichtbare All nach Ablauf der halben Lebensdauer des Universums sein Ausdehnungsmaximum, ehe es sich wieder zusammenzieht. Eine Kollisionsgefahr mit dem Antiuniversum besteht aufgrund der CPT-Transformation nicht, da

<sup>3</sup> d.h. in die Zeichenebene hinein

## Physikaufgabe 158

die beiden Universen jeweils um ein Weltalter auseinanderliegen und sich erst bei Urknall wieder treffen. Das Antiuniversum erreicht uns also aus der Vergangenheit, aber das ist angesichts der Zeitspiegelung auch klar, weil in einem solchen System alle Vorgänge rückwärts ablaufen. In unserem Universum hingegen können wir nicht in die Vergangenheit reisen.<sup>4</sup>

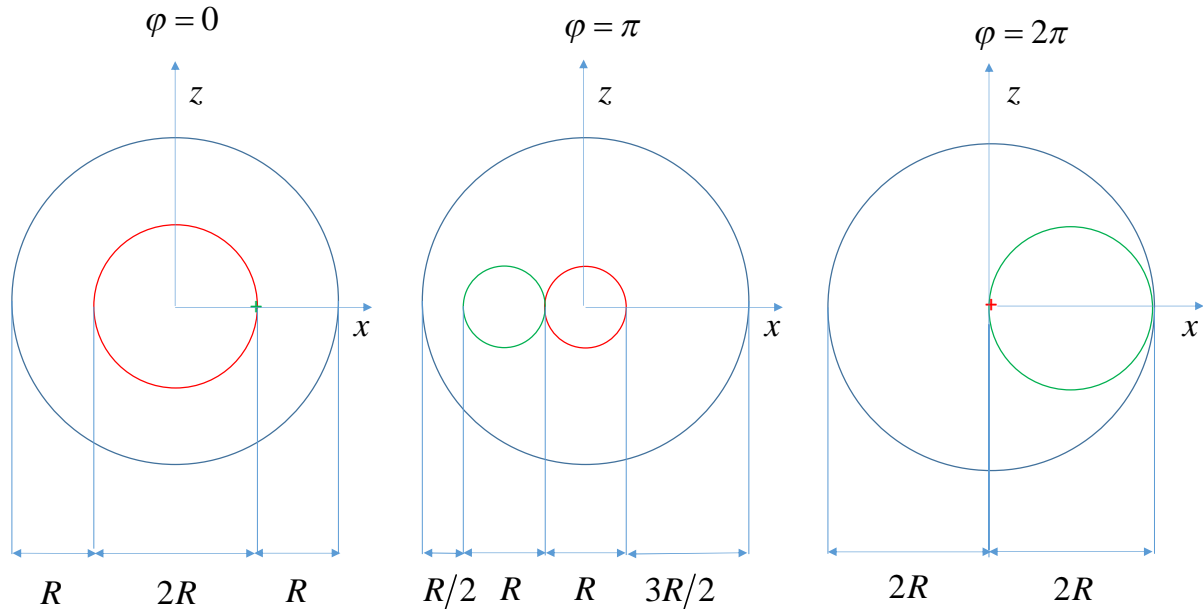


Abbildung 5. Punkt- und Randsingularität als Funktion des Azimutwinkels (schematisch)

Um unser Modell zu validieren, benötigen wir die Ableitungen der Koordinaten von Punkt- und Randsingularität nach  $\varphi$  und  $\theta$ . Die Koordinaten der Punktsingularität haben folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_P}{\partial \varphi} &= -R_S \sin \varphi + \frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi), & \frac{\partial x_P}{\partial \theta} &= -\frac{\varphi R_S}{2\pi} \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial y_P}{\partial \varphi} &= R_S \cos \varphi + \frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi), & \frac{\partial y_P}{\partial \theta} &= -\frac{\varphi R_S}{2\pi} \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial z_P}{\partial \varphi} &= \frac{R_S}{2\pi} \sin \theta, & \frac{\partial z_P}{\partial \theta} &= \frac{\varphi R_S}{2\pi} \cos \theta. \end{aligned}$$

Für die Koordinatenableitungen der Randsingularität gilt entsprechendes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_R}{\partial \varphi} &= -\frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \sin \varphi), & \frac{\partial x_R}{\partial \theta} &= -R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \theta \cos \varphi, \\ \frac{\partial y_R}{\partial \varphi} &= -\frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos \varphi), & \frac{\partial y_R}{\partial \theta} &= -R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial z_R}{\partial \varphi} &= -\frac{R_S}{2\pi} \sin \theta, & \frac{\partial z_R}{\partial \theta} &= R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \cos \theta. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Wohl aber in die Zukunft

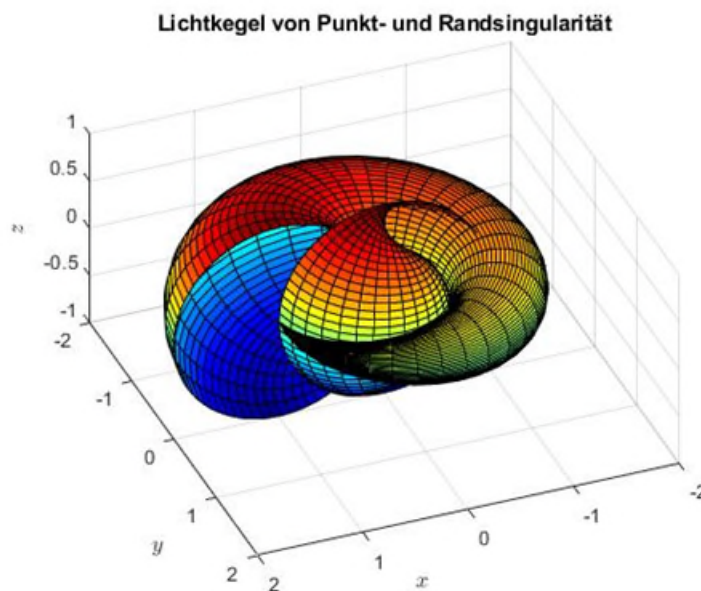
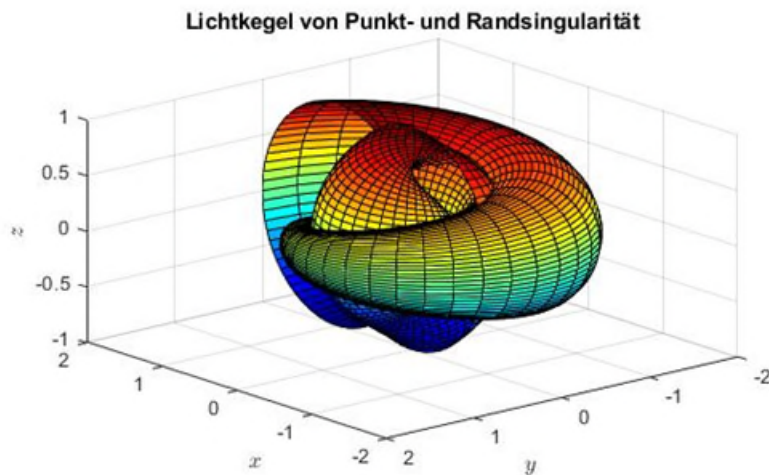


Abbildung 6. Punkt- und Randsingularität aus zwei verschiedenen Perspektiven

Die Tangentialebene lässt sich beschreiben durch die beiden Tangentialvektoren  $\mathbf{r}_\varphi$  und  $\mathbf{r}_\theta$  längs der Koordinatenlinien und den dazu senkrechten Normalenvektor  $\mathbf{N}$ . Für die Punktsingularität gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\varphi &= \frac{\partial x_P}{\partial \varphi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y_P}{\partial \varphi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z_P}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z = \frac{R_S}{2\pi} (\cos \theta \cos \varphi - (2\pi + \varphi \cos \theta) \sin \varphi) \mathbf{e}_x \\ &\quad + \frac{R_S}{2\pi} (\cos \theta \sin \varphi + (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \varphi) \mathbf{e}_y + \frac{R_S}{2\pi} \sin \theta \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

mit dem Betrag

## Physikaufgabe 158

---

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}_\varphi| &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_P}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_P}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{R_S}{2\pi} \left\{ (\cos \theta \cos \varphi - (2\pi + \varphi \cos \theta) \sin \varphi)^2 \right. \\
 &\quad \left. + (\cos \theta \sin \varphi + (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \varphi)^2 + \sin^2 \theta \right\}^{1/2} \\
 &= \frac{R_S}{2\pi} \sqrt{1 + (2\pi + \varphi \cos \theta)^2}
 \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial x_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z_P}{\partial \theta} \mathbf{e}_z = -\frac{\varphi R_S}{2\pi} (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \cos \theta \mathbf{e}_z)$$

mit dem Betrag

$$|\mathbf{r}_\theta| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_P}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_P}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_P}{\partial \theta}\right)^2} = \frac{\varphi R_S}{2\pi}.$$

An den Polen  $\theta = \pm \pi/2$  ist der Tangentialvektor in  $\theta$ -Richtung gegeben durch

$$\mathbf{r}_\theta = \mp \frac{\varphi R_S}{2\pi} (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y),$$

besitzt also keine  $z$ -Komponente, während der Tangentialvektor in  $\varphi$ -Richtung,

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{R_S}{2\pi} (-2\pi \sin \varphi \mathbf{e}_x + 2\pi \cos \varphi \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z),$$

einen Länge

$$|\mathbf{r}_\varphi| = \frac{R_S}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 + 1} > R_S$$

besitzt. Am Äquator  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$  ist der Tangentialvektor in  $\varphi$ -Richtung gegeben durch

$$\mathbf{r}_\varphi = \pm \frac{R_S}{2\pi} [(\cos \varphi \mp (2\pi \pm \varphi) \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (\sin \varphi \pm (2\pi \pm \varphi) \cos \varphi) \mathbf{e}_y].$$

Er hat den Betrag

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{r}_\varphi| &= \frac{R_S}{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi \mp (2\pi \pm \varphi) \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi \pm (2\pi \pm \varphi) \cos \varphi)^2} \\
 &= \frac{R_S}{2\pi} \sqrt{1 + (2\pi \pm \varphi)^2}.
 \end{aligned}$$

Der Normalenvektor der Punktsingularität ist gegeben durch



## Physikaufgabe 158

---

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{\varphi R_S^2}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} \left\{ \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi + \sin \varphi \right] \mathbf{e}_x \right. \\ \left. + \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \sin \varphi - \cos \varphi \right] \mathbf{e}_y + (2\pi + \varphi \cos \theta) \sin \theta \mathbf{e}_z \right\},$$

und den Betrag des Kreuzproduktes erhalten wir gemäß

$$|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = \frac{\varphi R_S^2}{4\pi^2} \left\{ \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi + \sin \varphi \right]^2 \right. \\ \left. + \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \sin \varphi - \cos \varphi \right]^2 + (2\pi + \varphi \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \right\}^{1/2}$$

Nach Ausmultiplizieren ergibt sich

$$|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = \frac{\varphi R_S^2}{4\pi^2} \sqrt{1 + (2\pi + \varphi \cos \theta)^2}.$$

Der normierte Normalenvektor lautet damit

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi + \varphi \cos \theta)^2}} \left\{ \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \cos \varphi + \sin \varphi \right] \mathbf{e}_x \right. \\ \left. + \left[ (2\pi + \varphi \cos \theta) \cos \theta \sin \varphi - \cos \varphi \right] \mathbf{e}_y + (2\pi + \varphi \cos \theta) \sin \theta \mathbf{e}_z \right\}.$$

Am Äquator, d.h. für  $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$ , ist dieser gegeben durch

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi \pm \varphi)^2}} \left\{ \left[ \pm (2\pi \pm \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi \right] \mathbf{e}_x + \left[ \pm (2\pi \pm \varphi) \sin \varphi - \cos \varphi \right] \mathbf{e}_y \right\},$$

und an den Polen wird er zu

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}} \left[ \sin \varphi \mathbf{e}_x - \cos \varphi \mathbf{e}_y \pm 2\pi \mathbf{e}_z \right].$$

Bei der Randsingularität verfahren wir analog:

$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z = \left( -\frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \sin \varphi) \right) \mathbf{e}_x \\ + \left( -\frac{R_S}{2\pi} \cos \theta (\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos \varphi) \right) \mathbf{e}_y - \frac{R_S}{2\pi} \sin \theta \mathbf{e}_z,$$

$$|\mathbf{r}_\varphi| = \left\{ \left( \frac{\partial x_R}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y_R}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_R}{\partial \varphi} \right)^2 \right\}^{1/2} = \frac{R_S}{2\pi} \left\{ \cos^2 \theta (\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \sin \varphi)^2 \right. \\ \left. + \cos^2 \theta (\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos \varphi)^2 + \sin^2 \theta \right\}^{1/2} = \frac{R_S}{2\pi} \sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2 \cos^2 \theta}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial x_R}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y_R}{\partial \theta} \mathbf{e}_y + \frac{\partial z_R}{\partial \theta} \mathbf{e}_z = -R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x \\ &\quad - R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \cos \theta \mathbf{e}_z, \\ |\mathbf{r}_\theta| &= \left\{ \left(\frac{\partial x_R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_R}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_R}{\partial \theta}\right)^2 \right\}^{1/2} = R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right).\end{aligned}$$

An den Polen  $\theta = \pm\pi/2$  ist der Tangentialvektor in  $\theta$ -Richtung waagrecht,

$$\mathbf{r}_\theta = \mp R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y),$$

und der Tangentialvektor in  $\varphi$ -Richtung steht senkrecht,

$$\mathbf{r}_\varphi = \mp \frac{R_S}{2\pi} \mathbf{e}_z.$$

Am Äquator  $\theta = 0$  fehlt in  $\varphi$ -Richtung die  $z$ -Komponente, in  $\theta$ -Richtung steht der Tangentialvektor wieder senkrecht auf der  $x$ - $y$ -Ebene:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\varphi &= -\frac{R_S}{2\pi} (\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \sin \varphi) \mathbf{e}_x - \frac{R_S}{2\pi} (\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos \varphi) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{r}_\theta &= R_S \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Bilden wir das allgemeine Kreuzprodukt beider Vektoren,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta &= \frac{R_S^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \left\{ -[\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \cos \varphi] \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + [\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \sin \varphi] \mathbf{e}_y + (2\pi - \varphi) \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_z \right\},\end{aligned}$$

ergibt sich nach Normierung mit dem Vektorbetrag

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| &= \frac{R_S^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \left\{ [\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \cos \varphi]^2 \right. \\ &\quad \left. + [\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \sin \varphi]^2 + (2\pi - \varphi)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\}^{1/2} \\ &= \frac{R_S^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2 \cos^2 \theta}\end{aligned}$$

der Normalenvektor

## Physikaufgabe 158

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta|} = -\frac{\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \cos \varphi}{\sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2 \cos^2 \theta}} \mathbf{e}_x + \frac{\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \cos^2 \theta \sin \varphi}{\sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2 \cos^2 \theta}} \mathbf{e}_y + \frac{(2\pi - \varphi) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2 \cos^2 \theta}} \mathbf{e}_z.$$

An den Polen  $\theta = \pm\pi/2$  ist er gegeben durch

$$\mathbf{N} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y,$$

und am Äquator  $\theta = 0$  gilt

$$\mathbf{N} = -\frac{\sin \varphi - (2\pi - \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{\cos \varphi + (2\pi - \varphi) \sin \varphi}{\sqrt{1 + (2\pi - \varphi)^2}} \mathbf{e}_y.$$

|                                  |   |  |  |   |  |  |
|----------------------------------|---|--|--|---|--|--|
| $\frac{x_P}{R_S}$                | 1   | 1  | $-\frac{3}{2}$   | -1  | 2  | 1  |
| $\frac{y_P}{R_S}$                | 0   | 0  | 0  | 0   | 0  | 0  |
| $\frac{z_P}{R_S}$                | 0   | 0  | 0  | $\pm\frac{1}{2}$  | 0  | $\pm 1$  |
| $\varphi$                        | 0   | 0  | $\pi$  | $\pi$   | $2\pi$   | $2\pi$   |
| $\theta$                         | 0   | $\pm\pi/2$   | 0  | $\pm\pi/2$  | 0  | $\pm\pi/2$   |
| $\frac{\mathbf{r}_\varphi}{R_S}$ | $\frac{\mathbf{e}_x}{2\pi} + \mathbf{e}_y$                | $\mathbf{e}_y \pm \frac{\mathbf{e}_z}{2\pi}$                 | $-\frac{\mathbf{e}_x}{2\pi} - \frac{3}{2}\mathbf{e}_y$     | $-\mathbf{e}_y \pm \frac{\mathbf{e}_z}{2\pi}$               | $\frac{\mathbf{e}_x}{2\pi} + 2\mathbf{e}_y$                | $\mathbf{e}_y \pm \frac{\mathbf{e}_z}{2\pi}$                 |
| $\frac{\mathbf{r}_\theta}{R_S}$  | 0   | 0  | $\frac{1}{2}\mathbf{e}_z$                                  | $\pm\frac{1}{2}\mathbf{e}_x$                                | $\mathbf{e}_z$   | $\mp\mathbf{e}_x$  |
| $\mathbf{N}$                     | $\frac{2\pi\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ | $\frac{-\mathbf{e}_y \pm 2\pi\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ | $\frac{-3\pi\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{1+9\pi^2}}$ | $\frac{\mathbf{e}_y \pm 2\pi\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ | $\frac{4\pi\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y}{\sqrt{1+16\pi^2}}$ | $\frac{-\mathbf{e}_y \pm 2\pi\mathbf{e}_z}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ |

Table 1. Spezielle Werte der Tangentialebene an die Punktsingularität

In Tabelle 1 sind einige ausgewählte Werte für die Punktsingularität angegeben. Speziell in den entarteten Polen der Punktsingularität für  $\varphi = 0$  und  $\theta = \pm\pi/2$  gilt

$$x_P = R_S, \quad y_P = 0, \quad z_P = 0,$$

d.h. die Pole wandern bei wachsenden  $z$ -Koordinaten ausschließlich in die positive  $\varphi$ -Richtung. Hat die Punktsingularität für  $\varphi = 2\pi$  ihre maximale Größe erreicht, ist die Entartung aufgehoben und es gilt

$$x_P = R_S, \quad y_P = 0, \quad z_P = \pm R_S.$$

## Physikaufgabe 158

Am äußeren Äquator mit  $\theta = 0$  und  $\varphi = \pi$  lauten die Werte

$$x_P = -\frac{3}{2}R_S, \quad y_P = 0, \quad z_P = 0,$$

und am inneren Äquator mit  $\theta = \pi$  und  $\varphi = \pi$  gilt

$$x_P = -\frac{1}{2}R_S, \quad y_P = 0, \quad z_P = 0.$$

In den Tabellen 1 und 2 wurden alle Größen auf den Schwarzschildradius normiert.

|                                  |   |                                  |  |                                  |                               |                                  |
|----------------------------------|---|----------------------------------|--|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| $\frac{x_R}{R_S}$                | 1   | 0                                | $-\frac{1}{2}$   | 0                                | 0                             | 0                                |
| $\frac{y_R}{R_S}$                | 0   | 0                                | 0  | 0                                | 0                             | 0                                |
| $\frac{z_R}{R_S}$                | 0   | $\pm 1$                          | 0  | $\pm \frac{1}{2}$                | 0                             | 0                                |
| $\varphi$                        | 0   | 0                                | $\pi$  | $\pi$                            | $2\pi$                        | $2\pi$                           |
| $\theta$                         | 0   | $\pm \pi/2$                      | 0  | $\pm \pi/2$                      | 0                             | $\pm \pi/2$                      |
| $\frac{\mathbf{r}_\varphi}{R_S}$ | $-\frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$              | $\mp \frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_z$ | $\frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$   | $\mp \frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_z$ | $-\frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_x$ | $\mp \frac{1}{2\pi}\mathbf{e}_z$ |
| $\frac{\mathbf{r}_\theta}{R_S}$  | $\mathbf{e}_z$  | $\mp \mathbf{e}_x$               | $\frac{1}{2}\mathbf{e}_z$                                | $\pm \frac{1}{2}\mathbf{e}_x$    | 0                             | 0                                |
| $\mathbf{N}$                     | $\frac{2\pi\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{1+4\pi^2}}$ | $\mathbf{e}_y$                   | $-\frac{\pi\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{1+\pi^2}}$ | $-\mathbf{e}_y$                  | $\mathbf{e}_y$                | $\mathbf{e}_y$                   |

Table 2. Spezielle Werte der Tangentialebene an die Randsingularität

Für die Randsingularität sind einige ausgewählte Werte in Tabelle 2 abgegeben. Speziell an den Polen der Randsingularität für  $\varphi = 0$  und  $\theta = \pm \pi/2$  gilt

$$x_R = 0, \quad y_R = 0, \quad z_R = \pm R_S,$$

und in den entarteten Polen der Randsingularität<sup>5</sup> für  $\varphi = 2\pi$  und  $\theta = \pm \pi/2$  haben wir die Werte

$$x_R = 0, \quad y_R = 0, \quad z_R = 0.$$

Aus dieser Parametrisierung geht klar hervor, daß der Raum nach den Gesetzen der Allgemeinen Relativitätstheorie von Anfang an vorhanden war, und nicht erst aufgespannt werden mußte. Er hat keinen zeitlichen Anfang und kein Ende, da er in sich geschlossen ist. Auch der Schwarzschildradius des Alls ist hinsichtlich seiner Größe unantastbar. Eine konstante Energie

<sup>5</sup> Natürlich besitzt eine Singularität Pole, da sich die Masse auch in der Singularität über die Oberfläche verteilt.

## Physikaufgabe 158

---

und ein konstanter Impuls besitzen konstante Masse und haben damit auch einen konstanten Kehrwert, den man die Raumzeit nennt. Was aber von Anfang an vorhanden war, bedarf keiner Ausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit, denn wohin sollte es sich auch ausdehnen, wenn die Ereignishorizont des Universums dessen endliche Größe bestimmt.

# Physikaufgabe 158

---

## Anhang

```
% Programm zur Veranschaulichung von Punkt- und Randsingularität
clear all

R=1;
theta=linspace(0,2*pi,72);
phi=linspace(0,2*pi,36);
[Phi,Theta]=meshgrid(phi,theta);

% Punktsingularität
% entsteht auf dem Rand der Randsingularität
% im Abstand des Schwarzschildradius
% und läuft auf einem Torus um die Randsingularität.
% Positiver Drehsinn
x=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*Phi/2/pi.*sin(Theta);
figure(1)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Lichtkegel der Punktsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')

% Randsingularität
% dreht sich im Inertialsystem
% mit abnehmendem Radius
% um den Koordinatenursprung
x=R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*(1-Phi/2/pi).*sin(Theta);
figure(2)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Lichtkegel der Randsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')

% Punkt- und Randsingularität
x=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*cos(Phi);
y=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*sin(Phi);
z=R.*Phi/2/pi.*sin(Theta);
figure(3)
surf(x,y,z);
x=R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*(1-Phi/2/pi).*sin(Theta);
hold on
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Lichtkegel von Punkt- und Randsingularität')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
```

## Physikaufgabe 158

---

```
% Universum
x=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*cos(Phi)+R.*(1-
Phi/2/pi).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*sin(Phi)+R.*(1-
Phi/2/pi).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*Phi/2/pi.*sin(Theta)+R.*(1-Phi/2/pi).*sin(Theta);
figure(4)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Lichtkegel des Universums')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')

% Punktsingularität des Universums koppelt mit Randsingularität des Antiuni-
versums
x=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*cos(Phi)-R.*Phi/2/pi.*cos(Theta).*cos(Phi);
y=(R+R.*Phi/2/pi.*cos(Theta)).*sin(Phi)-R.*Phi/2/pi.*cos(Theta).*sin(Phi);
z=R.*Phi/2/pi.*sin(Theta)-R.*Phi/2/pi.*sin(Theta);
figure(5)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Kopplung Universum/Antiuniversum')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')

% Punktsingularität des Antiuniversums koppelt mit Randsingularität des Uni-
versums
x=- (R+R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta)).*cos(Phi)+R.*(1-
Phi/2/pi).*cos(Theta).*cos(Phi);
y=- (R+R.*(1-Phi/2/pi).*cos(Theta)).*sin(Phi)+R.*(1-
Phi/2/pi).*cos(Theta).*sin(Phi);
z=-R.*(1-Phi/2/pi).*sin(Theta)+R.*(1-Phi/2/pi).*sin(Theta);
figure(6)
surf(x,y,z);
daspect([1 1 1])
colormap('jet')
title('Kopplung Antiuniversum/Universum')
xlabel('$x$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z$', 'interpreter', 'latex')
```