

Physikaufgabe 157

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Beweisen Sie, daß das Universum als Singularität mit Ereignishorizont nicht flach sein kann, sondern eine negative Krümmung aufweisen muß.

Beweis: Die erste Friedmann-Gleichung mit kosmologischer Konstante Λ lautet:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}.$$

Dabei ist H der Hubble-Parameter, c die Lichtgeschwindigkeit, a der Skalenfaktor, G die Gravitationskonstante und k der Krümmungsparameter der Robertson-Walker-Metrik. Da die Masse einer Singularität homogen auf dem Ereignishorizont verteilt ist, müssen wir die räumlich homogene Dichte ρ gemäß der Relation $M = \rho V = \sigma S$ durch die homogene Flächen-dichte σ ersetzen. Weil das Universum entgegen Einsteins Annahme keineswegs statisch ist, kann die kosmologische Konstante gleich Null gesetzt werden. Wir formen die obige Gleichung um und erhalten, zumal wir der Singularität Kugelgestalt zugestehen müssen, den Ausdruck

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\sigma S}{V} = \frac{8\pi G}{3} \frac{3M}{4\pi R_s^3} = \frac{2GM}{R_s} \frac{1}{R_s^2},$$

in welchem wir den Kugelradius des Alls durch den Schwarzschildradius eines nicht rotierenden Schwarzen Lochs maximaler Ausdehnung ersetzt haben. Dieser ist gegeben durch

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Setzen wir ihn in obige Gleichung ein, nimmt diese folgende Gestalt an:

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{c^2}{R_s^2} = \text{const.}$$

Da der Schwarzschildradius mit wachsender Ausdehnung des Alls gegen Unendlich geht und schließlich einem maximalen Grenzwert zustrebt,¹ können wir den Kehrwert gleich Null setzen,

$$\lim_{R_s \rightarrow \infty} \frac{c^2}{R_s^2} \rightarrow 0.$$

Damit kann der Krümmungsparameter k der Raumzeit nur noch negativ sprich hyperbolisch sein, d.h. mit $k = -1$ folgt

$$H^2 - \frac{c^2}{a^2} \approx 0.$$

¹ Weil eine Singularität nur durch Ausdehnung an Masse zunehmen kann

Physikaufgabe 157

Aus dem Vergleich mit $H^2 = (\dot{a}/a)^2$ folgt $\dot{a} = c$ bzw. $a = ct$. Die Expansion des Alls folgt also einem einfachen Exponentialgesetz mit den näherungsweise² Lösungen

$$a(t) = \frac{c}{H_0} e^{H_0(t-t_0)} \quad \text{bzw.} \quad \dot{a}(t) = c e^{H_0(t-t_0)} = H_0 a(t).$$

Damit ergibt sich der momentane Skalenfaktor³ zu

$$a(t_0) = \frac{c}{H_0} = ct_0.$$

Wäre das Weltall tatsächlich flach, ergäbe sich mit

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{3 \cdot 10^{19} \text{ km}}{69 \text{ km s}^{-1}} = \frac{300}{69} \cdot 10^{17} \text{ s} = \frac{300 \cdot 3,17}{69} \cdot 10^9 \text{ a} = 13,8 \cdot 10^9 \text{ a}$$

ein viel zu kleiner Radius von nur

$$a(t_0) = ct_0 = \frac{c}{H_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 1,06 \cdot 10^{-16} \text{ Lj} \cdot 13,8 \cdot 10^9 \text{ a}}{3,17 \cdot 10^{-8} \text{ a}} = 13,8 \cdot 10^9 \text{ Lj}.$$

So aber gilt

$$H^2 = \frac{c^2}{R_S^2} + \frac{c^2}{a(t)^2} = \frac{c^2}{R_S^2} + H_0^2 e^{-2H_0(t-t_0)}.$$

Setzen wir die Zeitabhängigkeit explizit ein, ergibt sich ein exponentiell zerfallender Hubble-Parameter:

$$H(t) = H_0 \sqrt{\frac{c^2 t_0^2}{R_S^2} + e^{-2H_0(t-t_0)}} \approx H_0 e^{-H_0(t-t_0)}.$$

Es müssen in der Tat noch viele Weltalter vergehen, ehe

$$H_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \frac{c}{R_S} \approx 0.$$

Wenn nun der Hubble-Parameter gegen Null geht, kommt das Weltall unweigerlich irgendwann zum Stillstand. Man macht es sich daher zu leicht, wenn man das Universum einfach als flach und ohne jede Raumkrümmung annimmt. Das ist nicht nur ein Widerspruch zur Allgemeinen Relativitätstheorie, wonach der Raum unabhängig von seiner Größe um den Massenmittelpunkt gekrümmt ist, sondern auch eine Verkennung des Vorzeichens der Raumkrümmung im Innern

² Wir verwenden hier den Wert für die Hubble-Konstante nach dem Gravitationslinseneffekt.

³ Dem wir die Dimension einer Länge geben, ihn also nicht wie in der modernen Kosmologie dimensionslos wählen

Physikaufgabe 157

einer Singularität. Bei uns auf der Erde scheint es suggestiv normal, daß alles zum Erdmittelpunkt hin angezogen wird. Da das Weltall als Singularität jedoch ein Hohlraum ist, dessen Masse außen auf dem Rand liegt, müssen wir umdenken. Versetzen Sie ihr Haus gedanklich in die Schwerelosigkeit des Alls und lassen Sie es rotieren. Wenn Sie noch auf Erden den Eindruck hatten, alle Gegenstände würden auf den Boden fallen, so können Sie im Weltall in Ihrem Haus plötzlich auf der Decke spazieren gehen. Auf Erden galt Ihnen die Krümmung als konvex und damit als sphärisch, jetzt im All ist sie plötzlich konkav und damit hyperbolisch, weil Sie den Innenraum nicht verlassen können. Das ist in einer Singularität genauso.

Versetzen Sie sich nun gedanklich ins Innere eines riesigen Reifens, dessen Schlauchwände die Begrenzungen darstellen. Dann finden Sie jenseits des großen Radius überall, wo Sie hintreten, nur Erhöhungen vor und es geht den Berg hinauf in die Zukunft. Betreten Sie indes den Bereich, der kleiner ist als der große Radius, wandern Sie konvex, allerdings in Richtung Vergangenheit, was physikalisch verboten ist. Nur auf der Erde läuft alles den Bach hinunter, aber die Erde dehnt sich ja auch nicht aus. Im Makroskopischen hingegen bildet die Zeitachse die vierte Dimension des Kosmos und darf niemals außer acht gelassen werden. Diese Regel gilt im Innern des Torus genauso: Raumartige Ereignisse außerhalb des Rückwärts- bzw. Vergangenheits-Lichtkegels sind für einen Beobachter, der sich darin aufhält, nicht sichtbar, denn sie liegen hinter dem Ereignishorizont. Nun haben wir erkannt, warum das Weltall negativ gekrümmt sein muß, und nicht flach sein kann. Alles fließt in sich zurück, Raum und Zeit ebenso wie Energie und Impuls. Punkt- und Randsingularität tauschen kontinuierlich Masse aus. Weil sich die beiden Singularitäten aber niemals berühren, außer beim Urknall, schließen sie dazwischen das sichtbare All ein, in dem wir leben. Eine Ausdehnung des Raums mit Überlichtgeschwindigkeit ist eine schöne Wunschvorstellung so mancher Physiker, die ihre Probleme anders nicht gelöst bekommen, mit der Realität hat das allerdings nur wenig zu tun, vor allem, weil in diesem Vorgang auch keinerlei Symmetrie zu erkennen ist. Zeit ist reziproke Energie, Energie ist Masse, und träge Masse kann sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Folglich kann das auch der Raum nicht, der nichts anderes als reziproker Impuls ist.

Das Zentrum des Universums liegt außerhalb der Singularität auf deren Rand und bewegt sich wie eine rollende Kugel im Laufe eines Weltalters einmal um diese herum. Eine Symmetrieüberlegung erfordert auch die Einbeziehung des CPT-invarianten Antiuniversums, ohne das alle kosmologischen Modelle versagen. Insbesondere müssen Gesamtdrehimpuls und Gesamtenergie des zusammengesetzten Universums Null ergeben. Damit scheidet die Überlegung, das Gravitationszentrum könne sich im Innern des Weltalls befinden, von vornherein aus. Ein externes Gravitationszentrum kann indes keine positive Krümmung aufweisen, sonst kann es kein gemeinsames Gravitationszentrum von Universum und Antiuniversum geben. Wenn also das Universum weder flach noch positiv gekrümmt sein kann, kann es nur eine paarweise negative Krümmung aufweisen,

qed