Aufgabe: Begründen Sie, warum das Universum keine homogene Massenfüllung haben kann und warum es zwei Singularitäten im All geben muß.

Beweis: Zum Beweis müssen wir Vollkugel und Kugelsphäre miteinander vergleichen. Die Rotationsenergie einer Vollkugel ergibt sich aus folgender Formel,

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_z \omega^2,$$

wobei

$$J_z = \frac{2}{5} M R_S^2$$

das Trägheitsmoment um die *z*-Achse ist. Dabei ist M die Gesamtmasse des Universums und R_S sein maximaler Schwarzschildradius. Die Masse sei homogen über das Kugelvolumen verteilt, die Dichte daher konstant. Setzen wir das Trägheitsmoment ein, ergibt sich

$$E_{rot} = \frac{1}{5} M R_S^2 \omega^2.$$

Der Schwarzschildradius eines rotierenden Schwarzen Lochs ist in Boyer-Lindquist-Koordinaten gegeben durch

$$R_S = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{L^2}{M^2 c^2}}.$$

Dabei ist $L = M R_S^2 \omega$ der Drehimpuls. Dieser läßt sich mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit leicht eliminieren:

$$R_S = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{R_S^4 \omega^2}{c^2}}.$$

Setzen wir nun noch die maximale Beschleunigung

$$\omega^2 R_S = \frac{c^2}{R_S} = \frac{GM}{R_S^2}$$

ein, folgt für den Schwarzschildradius eines mit Lichtgeschwindigkeit rotierenden Schwarzen Lochs der Ausdruck

$$R_S = \frac{GM}{c^2} + \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{G^2 M^2}{c^4}} = \frac{GM}{c^2}.$$

Die Bindungsenergie einer homogenen Vollkugel ist bekannt:

$$E_b = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_S}.$$

Sie berechnet sich aus der potentiellen Energie des ungebundenen Systems minus der Gesamtenergie. Wenn das ungebundene System keine potentielle Energie aufweist, gilt

$$E_b = E_{pot} - E = 0 - \left(-|E|\right) = |E|,$$

d.h. die Bindungsenergie ist stets positiv. Die potentielle Energie des gebundenen Systems ergibt sich aus dem Energiesatz wie folgt:

$$E_{pot} = -E_b - E_{rot},$$

wobei die kinetische Energie nur aus Rotationsenergie besteht. Mithin ist

$$E_{pot} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_S} - \frac{1}{5}MR_S^2\omega^2 = -\frac{4}{5}\frac{GM^2}{R_S}$$

und

$$E = E_{rot} + E_{pot} = \frac{1}{5}MR_S^2\omega^2 - \frac{4}{5}\frac{GM^2}{R_S} = \frac{1}{5}Mc^2 - \frac{4}{5}Mc^2 = -\frac{3}{5}Mc^2.$$

Daraus folgt

$$E_b = -E_{pot} - E_{rot} = \frac{4}{5}\frac{GM^2}{R_S} - \frac{1}{5}Mc^2 = \frac{3}{5}Mc^2.$$

Bei der restlichen Energie kann es sich daher nur um innere Energie in Form von Wärme handeln. Nun ist aber in einem Schwarzen Loch, das mit Lichtgeschwindigkeit rotiert, keine Wärme mehr vorhanden. Daraus folgt, daß das Innere eines Schwarzen Lochs keine homogen mit Materie ausgefüllte Kugel sein kann.

Betrachten wir nun zum Vergleich die homogen mit Masse der Dichte σ belegte rotierende Sphäre. Das Gravitationspotential einer Kugelsphäre auf deren Rand lautet

$$\phi\left(R_S\right) = \frac{GM}{R_S}.$$

Mit einer Kugeloberfläche von $S = 4\pi R_S^2$ ergibt sich ein Massenelement von

$$dM = \sigma dS = \sigma R_S^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Damit lautet das Differential der Bindungsenergie

$$dE_b = \phi(R_S)\,dM = \sigma \frac{GM}{R_S} R_S^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$

und die Bindungsenergie ergibt sich aus dem Doppelintegral über die Winkel θ und φ zu

$$E_b = \sigma \frac{GM}{R_S} R_S^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi\sigma R_S^2 \frac{GM}{R_S} = \frac{GM^2}{R_S}.$$

Mit dem Trägheitsmoment der Sphäre,

$$J_z = \frac{2}{3} M R_S^2,$$

erhalten wir eine Rotationsenergie von

$$E_{rot} = \frac{1}{3} M R_S^2 \omega^2.$$

Aus beiden Termen können wir wieder leicht die potentielle Energie des gebundenen Systems berechnen,

$$E_{pot} = -E_b - E_{rot} = -\frac{GM^2}{R_S} - \frac{1}{3} M R_S^2 \omega^2 = -\frac{4}{3}\frac{GM^2}{R_S},$$

und daraus dann die Energie

$$E = E_{rot} + E_{pot} = \frac{1}{3} M R_S^2 \omega^2 - \frac{4}{3}\frac{GM^2}{R_S} = \frac{1}{3} Mc^2 - \frac{4}{3} Mc^2 = -Mc^2.$$

Das liefert uns eine Bindungsenergie ohne innere Energie sprich Wärme, da die äußere mechanische Energie betragsmäßig nicht mehr größer werden kann, als sie ist. Die Bindungsenergie ist folglich

$$E_b = -E_{pot} - E_{rot} = \frac{4}{3}\frac{GM^2}{R_S} - \frac{1}{3} Mc^2 = Mc^2.$$

Betrachten wir nun eine Punktmasse *m*, die direkt auf dem Schwarzschildradius einer Singularität sitzt. Dann gilt aufgrund des Kräftegleichgewichts zwischen Gravitations- und Zentrifugalkraft die Relation $F_g \sin\theta + F_z = 0$ bzw.

$$-\frac{mM(r)G\sin\theta}{r^2} + m\frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Der Radius der Singularität sei $r < R_S$. Mit der Masse $M(r) = 4\pi\sigma r^2$ folgt dann im Abstand

$$\rho(r) = r\sin\theta$$

von der Achse das Geschwindigkeitsquadrat

$$v^2 = \frac{M(r)G\sin^2\theta}{r} = \frac{r}{R_S}\frac{GM}{R_S}\sin^2\theta.$$

Wegen $c^2 = GM/R_S$ folgt schließlich für eine auf dem Rand eines maximal rotierenden Schwarzen Loches befindliche Masse *m* in Abhängigkeit von der Breite eine Geschwindigkeit von

$$v = c\sqrt{\frac{r}{R_S}}\sin\theta,$$

d.h. nur Teilchen auf dem Äquator $r = R_S$ mit $\theta = \pi/2$ besitzen Lichtgeschwindigkeit: $v = c$. Zum Pol hin, also in höheren Breiten, rotiert eine auf dem Rand der Sphäre fest verankerte Masse langsamer, und Massen auf den beiden Polen rotieren überhaupt nicht. Das Universum startet also als Punktsingularität ohne Rotation und erreicht erst, wenn sich die Sphäre bis zu ihrem vollen Schwarzschildradius ausgedehnt hat, ihre maximale Rotation. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muß es also neben der Punktsingularität noch eine weitere sogenannte Randsingularität geben, sonst wäre dieser Erhaltungssatz verletzt

qed

