Aufgabe: Beweisen Sie anhand des Newtonschen Gravitationsgesetzes, daß das Weltall flach ist.

Beweis: Nehmen wir an, eine Galaxie der Masse *m* entferne sich mit einer Radialgeschwindigkeit $v_r = \dot{r}$ vom Massenzentrum des Universums der Masse *M*. Mit der Gravitationskonstante *G* lautet das Newtonsche Gravitationsgesetz mit der Gravitationskraft *F* in seiner einfachsten Form

$$F = -m\frac{GM}{r^2},$$

wobei der Abstand *r* proportional zur Zeit *t* ist, und $r = \dot{r}t$. Es gilt also wegen $F = m\ddot{r}$ für die Galaxie die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d\dot{r}}{dt} + m\frac{GM}{\dot{r}^2 t^2} = 0$$

bzw. nach Kürzen der Masse und Trennung der Variablen

$$v_r^2 dv_r = -GM\frac{dt}{t^2}.$$

Diese Gleichung kann elementar integriert werden,

$$\int v_r^2 dv_r = -GM\int\frac{dt}{t^2},$$

wobei wir die Integrationskonstante gleich null gesetzt haben. Die Integration ergibt

$$v_r^3 = \frac{3GM}{t} \quad \text{bzw.} \quad v_r^2 = \frac{3GM}{r},$$

mit $v_r(\infty) = 0$. Der Energieerhaltungssatz für die Galaxie lautet demnach

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 - m\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} = \text{const.}$$

Aufgrund der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz $E = mc^2$ folgt daraus

$$c^2 = \frac{1}{2}\frac{GM}{r}.$$

Da die Gesamtmasse des Universums im Schwerpunktsystem der Singularität ruht, folgt weiter, daß der Radius konstant sein muß,

$$r = \frac{1}{2}\frac{GM}{c^2} = \frac{1}{4}\frac{2GM}{c^2} = \frac{1}{4}R_S = \text{const},$$

da die rechte Seite der Gleichung proportional zum Schwarzschildradius ist. Da aber die Masse auf dem Schwarzschildradius des Alls konzentriert ist, fehlt natürlich ein Teil dieser Masse. Diese fehlende Masse kann nur in Form von Rotationsenergie hinzukommen, d.h. durch Drehimpuls. Wir erweitern also unseren Ansatz unter Einbeziehung der Winkelgeschwindigkeit auf

$$r = vt = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,t.$$

Vorausgesetzt, daß $L_x = L_y = 0,$ und mit dem Trägheitsmoment einer Punktmasse im Abstand r von der Drehachse $J_z = mr^2$ ist der Drehimpuls der Galaxie gegeben durch $L_z = J_z\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}.$ Daraus erhalten wir die Gesamtenergie zu

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{mGM}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}\right) - \frac{mGM}{r}.$$

Nach Kürzen der Masse auf der rechten Seite ergibt sich die folgende Umformung:

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{2GM}{r}.$$

Einsetzen der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz $E = mc^2$ führt zu

$$2c^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2c^4}{E^2r^2} - \frac{2GM}{r},$$

und nach Division durch die linke Seite folgt schließlich

$$1 = \frac{1}{2c^2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2c^4}{E^2r^2}\right) - \frac{GM}{rc^2}.$$

Da der Radius des Alls für $\dot{r} = 0$ dem Schwarzschildradius gleichzusetzen ist, über den hinaus nichts aus einer Singularität entweichen kann, folgt weiter

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{L^2c^2}{E^2R_S^2} - \frac{2GM}{R_Sc^2}\right).$$

Diese Gleichung hat nur dann eine Lösung, wenn das All ein starrer Körper ist, d.h. wenn gilt

$$R_S^2 = \frac{L^2c^2}{3E^2} = \frac{\left(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\right)c^2}{3E^2} = \frac{L_z^2c^2}{E^2},$$

wobei $L_x = L_y = L_z$. Damit ist gezeigt, daß die Masse der Galaxie auf dem Schwarzschildradius des Universums konzentriert ist,

$$R_S = \frac{L_zc}{E} = \frac{L_z}{p},$$

und daß das Universum flach ist,[1]

qed

[1] wobei seine Oberfläche natürlich gekrümmt ist

