Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Quantenmechanik die Entropie des Weltalls aus seinen Phasenraumzuständen. Wie viele verschiedene Anfangsbedingungen hat das Multiversum?

Lösung: Wir gehen davon aus, daß das All ein Schwarzes Loch im Hawkingschen Sinne ist, für welches die bekannte Entropieformel

$$S = \frac{kc^3 A}{4\hbar G}$$

gilt, wobei *A* die Oberfläche einer Sphäre mit Schwarzschildradius R_S ist, der nicht dem gegenwärtigen Radius der momentanen Ausdehnung entspricht. Die übrigen Größen sind Naturkonstanten: die Boltzmannkonstante *k*, die Gravitationskonstante *G*, die Lichtgeschwindigkeit *c* und das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$. Setzen wir die Oberfläche einer Sphäre $A = 4\pi R_S^2$ in die Entropieformel ein, können wir diese mit Hilfe des Schwarzschildradius

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

wie folgt umformen:

$$S = \frac{4\pi kc^3 R_S^2}{4\hbar G} = \frac{\pi kc^3}{\hbar G}\frac{4G^2M^2}{c^4} = \frac{1}{2}\frac{8\pi kGM}{\hbar c^3}Mc^2,$$

wobei *M* die Masse des Alls ist. Substituieren wir die Naturkonstanten durch die Hawking-Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM},$$

folgt aus der Entropie

$$S = \frac{1}{2}\frac{Mc^2}{T} = \frac{1}{2}\frac{E}{T}$$

die Wärmemenge

$$Q = TS = \frac{1}{2}Mc^2 = \frac{1}{2}E,$$

die halb so groß ist wie die Energie *E* des Alls insgesamt. Wie aus der statistischen Physik bekannt, können wir die Entropie $S = k\ln\Omega$ durch Spurbildung einer Verteilungsfunktion der Phasenraumpunkte eines *N*-Teilchensystems

$$(\vec{q}, \vec{p}) = \left(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f\right)$$

aus der die Differenz der Phasenraumvolumina

$$Z\left(E,V,N\right)=\int_0^E d^f q d^f p$$

herleiten, indem wir den Phasenraum über ein Energieintervall von E bis $E+\Delta E$ integrieren,

$$\Omega\left(E,V,N\right)=Z\left(E+\Delta E,V,N\right)-Z\left(E,V,N\right)=\int_E^{E+\Delta E} d^f q d^f p.$$

Im dreidimensionalen Raum der klassischen Thermodynamik gilt $f=3N,$ z.B. für ein ideales Gas. In der Quantenmechanik gilt dies aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation jedoch nicht. Zwar können wir auch dort die Entropie schreiben als

$$S=k\ln\Omega=-k\int_E^{E+\Delta E} d^f q d^f p \frac{1}{\Omega\left(E,V,N\right)}\ln\frac{1}{\Omega\left(E,V,N\right)},$$

aber um das Integral auszuwerten, benötigen wir zunächst $\Omega.$ Die Zahl der Zustände des Alls mit einer Energie, die zwischen E und $E+\Delta E$ liegt,[1] beträgt näherungsweise

$$\Omega\equiv\Delta Z=\int_Z^{Z+\Delta Z} dZ=\int_E^{E+\Delta E}\frac{\partial Z}{\partial E}dE\approx\frac{\partial Z}{\partial E}\int_E^{E+\Delta E} dE=\frac{\partial Z}{\partial E}\Delta E.$$

Eine kanonische Zustandssumme $Z\left(E,V,N\right)$ wie für ein ideales Gas können wir für ein Schwarzes Loch jedoch nicht verwenden, weil unser Problem aufgrund der Quantenmechanik eindimensional ist. Mit

$$\frac{S}{k}=\frac{4\pi GM^2}{\hbar c}=\frac{4\pi GE^2}{\hbar c^5}=\ln\Omega$$

und in der Näherung

$$\Omega\approx\frac{\partial Z}{\partial E}\Delta E=\exp\frac{4\pi GE^2}{\hbar c^5}$$

können wir nur auf ein triviales Ergebnis hoffen. Mit der intuitiv gewonnenen exakten Lösung

$$\frac{\partial Z}{\partial E}=\frac{8\pi GE}{\hbar c^5}\exp\frac{4\pi GE^2}{\hbar c^5}$$

hingegen kommt man genau zum selben Ergebnis, wenn man setzt:

$$\Delta E=\frac{\hbar c^5}{8\pi GE}.$$

[1] Auch das All besitzt eine Unschärfe.

Daß die empirisch gefundene Funktion das Problem exakt löst, wollen wir nachfolgend beweisen. Ziehen wir die partielle Ableitung des Phasenraumvolumens nämlich hinter das Integralzeichen, folgt

$$\Omega = \int_E^{E+\Delta E} \frac{\partial Z}{\partial E} dE = \frac{8\pi G}{\hbar c^5} \int_E^{E+\Delta E} E \exp \frac{4\pi G E^2}{\hbar c^5} dE = \frac{4\pi G}{\hbar c^5} \int_{E^2}^{(E+\Delta E)^2} \exp \frac{4\pi G \xi}{\hbar c^5} d\xi$$
$$= \exp \frac{4\pi G \left(E+\Delta E\right)^2}{\hbar c^5} - \exp \frac{4\pi G E^2}{\hbar c^5}.$$

Unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung und in der Näherung der Exponentialfunktion bis zu Gliedern erster Ordnung folgt weiter

$$\Omega \approx \exp \frac{4\pi G \left(E^2 + 2E\Delta E\right)}{\hbar c^5} - \exp \frac{4\pi G E^2}{\hbar c^5} = \exp \frac{4\pi G E^2}{\hbar c^5} \left(\exp \frac{8\pi G E \Delta E}{\hbar c^5} - 1 \right)$$
$$\approx \frac{8\pi G E}{\hbar c^5} \exp \frac{4\pi G E^2}{\hbar c^5} \Delta E$$

und daraus

$$\frac{8\pi G E}{\hbar c^5} \Delta E = 1,$$

was zu beweisen war. Nach Einsetzen des Schwarzschildradius

$$R_S = \frac{2GE}{c^4}$$

in die exakte Lösung erhalten wir für die auf der Sphärenoberfläche des Schwarzen Lochs gelegenen Zustände den Ausdruck

$$\Omega = \frac{4\pi R_S \Delta E}{\hbar c} \exp \frac{2\pi R_S E}{\hbar c} = \frac{4\pi R_S \Delta p}{\hbar} \exp \frac{2\pi R_S p}{\hbar},$$

wobei wir noch wegen der Unschärferelation die Energiedifferenz $\Delta E = c\Delta p$ durch eine Impulsdifferenz ersetzt haben. Für die Näherungslösung gilt also

$$\Delta E = \frac{\hbar c^5}{8\pi G E} = \frac{\hbar c}{4\pi R_S} = \frac{\hbar}{2} \frac{c}{2\pi R_S},$$

und mit der kanonischen Ortunschärfe Δq folgt nach Einsetzen von $2\pi R_S = N\Delta q$ die Impulsunschärfe

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{2\pi R_S} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{N\Delta q}.$$

Aufgrund der Unschärferelationen

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta q_i \Delta p_j = \frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^{N} \delta_{ij} = \frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta q_i \Delta p_j = \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^{N} 1 = N \frac{\hbar}{2}$$

folgt mit

$$p = \sum_{j=1}^{N} p_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \Delta p_j$$

das Phasenraumvolumen

$$\Omega = \frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^{N} \Delta q_i \Delta p_j \exp \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta q_i \Delta p_j}{\hbar} = \exp \frac{N}{4} = \sqrt[4]{e}^{\,N}.$$

Wir sehen also, daß die Phasenräume von Ort und Impuls eindimensional sind und auf einem Kreisumfang liegen. Daraus folgt die Entropie des Universums

$$S = k \ln \Omega = \frac{1}{4} kN.$$

Sie entspricht der Entropie eines idealen Gases mit einem Freiheitsgrad, dessen innere Energie gegeben ist durch

$$E = \frac{1}{2} NkT,$$

und damit ist auch die Wärme

$$Q = TS = \frac{1}{4} NkT = \frac{E}{2}$$

konstant. Alles ist quasi aus Wärme und kehrt in Wärme zurück. Wie wir gesehen haben, ist die Entropie des Alls nicht von der Temperatur abhängig. Weiter als bis zu diesem Wert kann sie auch nicht zunehmen. Das Weltall kann demnach nicht auf eine scharfe Singularität abgebildet werden, weil der absolute Temperaturnullpunkt nicht erreicht werden kann. Kürzen der Energie auf beiden Seiten der Gleichung

$$\frac{S}{k} = \ln \Omega = \frac{2\pi R_S E}{\hbar c} = \frac{E}{2kT}$$

liefert die Abhängigkeit des Schwarzschildradius von der Temperatur

$$R_S = \frac{\hbar c}{4\pi kT} = \frac{2GM}{c^2}.$$

Aus dem eben genannten Grund, weil nämlich nach dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik, auch Nernstsches Theorem genannt, der absolute Temperaturnullpunkt nicht erreicht werden kann, kann auch der Schwarzschildradius nicht unendlich werden. Es gibt demnach beim Urknall so viele Anfangsbedingungen, wie das Weltall im Phasenraum Zustände annehmen kann, und jeder dieser Zustände ist gleich wahrscheinlich und führt zu einem völlig anderen Universum.