Aufgabe: Berechnen Sie die Bahn des Elektrons im Wasserstoffatom und erklären Sie, warum ein Elektron auf der innersten Bahn nicht strahlen kann.

Lösung: Das Elektron mit der Masse m_e am Ort $\vec{r}_e$ und das Proton mit der Masse m_p am Ort $\vec{r}_p$ gehorchen den Bewegungsgleichungen

$$m_e \ddot{\vec{r}}_e = \vec{F}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad m_p \ddot{\vec{r}}_p = -\vec{F}(\vec{r}),$$

wobei die Kraft nur von der relativen Position $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$ abhängt. Beide Körper drehen sich um den Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{m_e \vec{r}_e + m_p \vec{r}_p}{m_p + m_e},$$

welcher eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit ausführt. Daher ist

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_e \ddot{\vec{r}}_e + m_p \ddot{\vec{r}}_p}{m_p + m_e} = \frac{\vec{F}(\vec{r}) - \vec{F}(\vec{r})}{m_p + m_e} = 0.$$

Die Bewegungsgleichung des relativen Abstands lautet

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_e - \ddot{\vec{r}}_p = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_e} + \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_p} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_e} + \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m_p} = \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}\right)\vec{F}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{\mu}\vec{F}(\vec{r})$$

wobei μ die reduzierte Masse des Zweikörperproblems ist,

$$\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} = \frac{m_p + m_e}{m_e m_p}.$$

Formen wir den Schwerpunkt entsprechend um,

$$(m_p + m_e)\vec{R} = m_e \vec{r}_e + m_p \vec{r}_p,$$

und multiplizieren den Differenzvektor mit der Protonenmasse,

$$m_p \vec{r} = m_p \vec{r}_e - m_p \vec{r}_p,$$

erhalten wir durch Addition der beiden Gleichungen den Vektor zum Elektron

$$\vec{r}_e = \vec{R} + \frac{m_p}{m_e + m_p}\vec{r}.$$

Multiplizieren wir ferner den Differenzvektor mit der Elektronenmasse,

$$m_e\vec{r} = m_e\vec{r}_e - m_e\vec{r}_p,$$

und subtrahieren die beiden Gleichungen, ergibt sich der Vektor vom Ursprung zum Proton

$$\vec{r}_p = \vec{R} - \frac{m_e}{m_p + m_e}\vec{r}.$$

Subtraktion der beiden Vektoren ergibt wieder den Differenzvektor. Zweimaliges Differenzieren von $\vec{r}_e$ und $\vec{r}_p$ führt zu den separierten Bewegungsgleichungen des entsprechenden Einkörperproblems,

$$m_e\ddot{\vec{r}}_e = m_e\left(\ddot{\vec{R}} + \frac{m_p}{m_e + m_p}\ddot{\vec{r}}\right) = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}\ddot{\vec{r}} = \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\left(\frac{m_e + m_p}{m_p}\vec{r}_e\right),$$
$$m_p\ddot{\vec{r}}_p = m_p\left(\ddot{\vec{R}} - \frac{m_e}{m_p + m_e}\ddot{\vec{r}}\right) = -\frac{m_e m_p}{m_p + m_e}\ddot{\vec{r}} = -\mu\ddot{\vec{r}} = -\vec{F}\left(-\frac{m_e + m_p}{m_e}\vec{r}_p\right).$$

Differenzieren wir den Ortsvektor $\vec{r} = r\vec{e}_r$ ein erstes und ein zweites Mal, erhalten wir folgende Relationen:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\left(\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi\right) = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung des Zweikörperproblems

$$\ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r = \frac{1}{\mu}F(r)\vec{e}_r.$$

Mithin gilt die skalare Gleichung

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{\mu}F(r).$$

Der Winkelanteil der Beschleunigung verschwindet bei Zentralkräften bekanntlich,

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

Multipliziert mit μr folgt

$$\mu r\left(2\dot{r} + r\ddot{\varphi}\right) = \mu\left(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\varphi}\right) = 0,$$

d.h. der Drehimpuls $L = \mu r^2\dot{\varphi}$ bleibt erhalten. Da die Coulombkraft zwischen Elektron und Proton anziehend ist, folgt mit

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

und unter Verwendung der Zentrifugalkraft die Differentialgleichung

$$\mu\ddot{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} + \mu\frac{v_\varphi^2}{r}.$$

Diese können wir durch Einsetzen der Erhaltungsgröße $L = \mu r v_\varphi$ in den Ausdruck

$$\mu\ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} - \frac{L^2}{\mu}\frac{1}{r^3} = 0$$

separieren. Multiplizieren wir nämlich mit $\dot{r}$,

$$\mu\dot{r}\ddot{r} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{r}}{r^2} - \frac{L^2}{\mu}\frac{\dot{r}}{r^3} = 0,$$

so erhalten wir mittels der Hilfsgrößen

$$\frac{\dot{r}}{r^2} = -\frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\frac{d}{dt}\frac{1}{r}, \quad \frac{\dot{r}}{r^3} = -\frac{1}{2}\frac{dr}{dt}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2}, \quad \dot{r}\ddot{r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{r}^2$$

einen Ausdruck der Form

$$\frac{1}{2}\mu\frac{d}{dt}\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\frac{1}{r} + \frac{L^2}{\mu}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{L^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\right) = 0.$$

Das ist aber genau der Energieerhaltungssatz

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{L^2}{2\mu}\frac{1}{r^2} = \frac{\mu^2 r^4\dot{\varphi}^2}{2\mu r^2}\frac{\dot{r}^2}{r^2\dot{\varphi}^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$
$$= \frac{L^2}{2\mu r^2}\left(\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + 1\right) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Nach nochmaliger Umformung

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{L^2}r^2 + \frac{\mu e^2}{2\pi\varepsilon_0 L^2}r - 1$$

lassen sich die Variablen trennen,

$$\frac{dr}{r\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2}r^2 + \frac{\mu e^2}{2\pi\varepsilon_0 L^2}r - 1}} = d\varphi.$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{2\mu E}{L^2}, \quad \beta = \frac{\mu e^2}{2\pi\varepsilon_0 L^2}, \quad \gamma = -1$$

und

$$\sqrt{4\alpha + \beta^2} = \frac{2\mu}{L^2}\sqrt{\frac{4EL^2}{2\mu} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}$$

folgt unter der Bedingung $4\alpha\gamma - \beta^2 = -\left(4\alpha + \beta^2\right) < 0$ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{\alpha r^2 + \beta r + \gamma}} = -\arcsin\frac{\beta r - 2}{r\sqrt{4\alpha + \beta^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2 - \beta r}{r\sqrt{4\alpha + \beta^2}}.$$

Dieses besitzt die Lösung

$$\varphi - \varphi_{\max} = \int_{r_{\max}}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{\dfrac{2\mu E}{L^2}r^2 + \dfrac{\mu e^2}{2\pi\varepsilon_0 L^2}r - 1}} = -\arccos\frac{\dfrac{L^2}{\mu r} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}{\sqrt{\dfrac{2EL^2}{\mu} + \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}}$$

$$+\arccos\frac{\dfrac{L^2}{\mu r_{\max}} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}{\sqrt{\dfrac{2EL^2}{\mu} + \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}}.$$

Dabei ist $\varphi_{\max}$ der Azimutwinkel im fernsten Punkt der Ellipsenbahn,

$$-\varphi_{\max} = \arccos\frac{\dfrac{L^2}{\mu r_{\max}} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}{\sqrt{\dfrac{2EL^2}{\mu} + \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}} = -\pi.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten der letzten Gleichung den Kosinus, ergibt sich

$$\cos\varphi_{\max} = \frac{\dfrac{L^2}{\mu r_{\max}} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}{\sqrt{\dfrac{2EL^2}{\mu} + \left(\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}} = \cos\pi = -1.$$

Diesen Ausdruck können wir nach $r_{\max}$ auflösen:

$$r_{\max} = \frac{L^2}{\mu} \frac{1}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} - \sqrt{\frac{2EL^2}{\mu} + \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2} \frac{1}{1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2}}.$$

Entsprechend ist

$$r(\varphi) = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2} \cos\varphi}.$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse

$$r(\varphi) = \frac{q}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

mit Halbparameter[1]

$$q = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2}$$

und Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2}.$$

Quadrieren wir die Wurzel,

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2,$$

und formen entsprechend um,

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2 > 0,$$

dann sehen wir, daß die Energie für ein gebundenes Elektron negativ sein muß.

Die folgende Nebenrechnung wird benötigt, um die große Halbachse durch Halbparameter und Exzentrizität auszudrücken:

$$a = r(0) - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{b^2}{a(1+\varepsilon)} - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

[1] Um keine Verwechslungen mit dem Impuls aufkommen zu lassen, verwenden wir das Symbol *q* anstatt *p*.

In diesem Ausdruck substituieren wir die kleine Halbachse mittels des Halbparameters und formen um,

$$\sqrt{a^2 - qa} = \frac{q}{1+\varepsilon} - a.$$

Wir quadrieren nun beide Seiten der Gleichung,

$$a^2 - qa = \left(\frac{q}{1+\varepsilon} - a\right)^2 = \frac{q^2}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{2q}{1+\varepsilon}a + a^2,$$

und kürzen links und rechts den quadratischen Term in a. Es verbleibt der Ausdruck

$$\frac{q^2}{(1+\varepsilon)^2} + qa = \frac{2q}{1+\varepsilon}a.$$

Nach Kürzen eines Halbparameters auf beiden Seiten und entsprechender Umformung verbleibt

$$\frac{q}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{2}{1+\varepsilon}a - a = a\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Nach Multiplikation mit $1+\varepsilon$ erhalten wir die große Halbachse in der Form

$$a = \frac{q}{1-\varepsilon^2}.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Ausdrücke für q und ε ein, ergibt sich für a der Wert

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2} \frac{1}{-\frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E}.$$

Diese Gleichung lösen wir nun noch nach der Energie auf und erhalten das aussagekräftige Ergebnis

$$E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2a}.$$

Substituieren wir die Energie in obiger Radialgleichung, erhalten wir den endgültigen Ausdruck

$$r(\varphi) = \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e^2 a}} \cdot \cos\varphi} = \frac{q}{1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi}$$

mit

$$\varepsilon = \sqrt{1-\frac{q}{a}}.$$

Da die Energie negativ ist, scheiden Hyperbeln als Lösungen aus. Die Exzentrizität kann auch nicht imaginär werden, folglich muß $a \ge q$ sein. Im Grenzfall $a = q$ ergibt sich somit ein Kreis mit Radius q. Setzen wir die Energie ein, so sehen wir, daß die Bahn für $E = 0$ eine Parabel ist,

$$\varepsilon^2 = 1-\frac{q}{a} = 1+\frac{2EL^2}{\mu}\left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\right)^2 = 1.$$

In diesem Fall ist a gleich unendlich und das Elektron wäre nicht mehr gebunden. Eine Exzentrizität von null entspricht einer Kreisbahn mit einer Energie von

$$E_{\min} = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}.$$

Kleiner kann die Bahn nicht werden. Das Elektron kann auf der Kreisbahn auch nicht strahlen, weil es auf dieser Bahn keine Energie mehr verlieren kann.[2] Somit lautet die Radialgeschwindigkeit nach Substitution durch den Drehimpuls

$$v_r = \dot{r} = \frac{d}{dt}\frac{q}{1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}\frac{q}{1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi} = q\dot{\varphi}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\frac{\sin\varphi}{\left(1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi\right)^2}$$

$$= \dot{\varphi}\frac{1}{q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\frac{q^2\sin\varphi}{\left(1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi\right)^2} = \dot{\varphi}r^2\frac{1}{q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\sin\varphi = \frac{L}{\mu q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\sin\varphi.$$

Ferner erhalten wir mit Hilfe der Umformung $L = \mu r^2\dot{\varphi} = \mu r v_\varphi$ die Azimutalgeschwindigkeit

$$v_\varphi = \frac{L}{\mu r} = \frac{L}{\mu q}\left(1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi\right).$$

Damit ergibt sich folgende Bahngeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{v_r^2+v_\varphi^2} = \frac{L}{\mu q}\sqrt{2-\frac{q}{a}+2\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi}.$$

Der Impuls ist somit gegeben durch

$$p = \mu v = \frac{L}{q}\sqrt{2-\frac{q}{a}+2\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi}.$$

[2] Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden.

Er kann zerlegt werden in die beiden Komponenten

$$p_r = \mu v_r = \frac{L}{q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\sin\varphi \quad \text{und} \quad p_\varphi = \mu v_\varphi = \frac{L}{q}\left(1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi\right).$$

Mit den Ausdrücken

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{L}{\mu q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\frac{1}{q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi$$

und

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^3}$$

ist die Radialbeschleunigung gegeben durch

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{q\mu^2 r^2}\left[\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi - \frac{q}{r}\right] = -\frac{L^2}{q\mu^2 r^3} = -\frac{L^2}{\mu^2 q^3}\left(1+\sqrt{1-\frac{q}{a}}\cos\varphi\right)^3.$$

In Richtung des Abstands vom Proton und orthogonal dazu gelten nun folgende Bewegungsgleichungen für Ort und Impuls:[3]

$$\Delta r = v_r \Delta t, \quad \Delta p_r = \mu w_r \Delta t, \quad \Delta p_\varphi = \mu w_\varphi \Delta t = \mu\left(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\right)\Delta t = 0.$$

Die Ortsunschärfe erhalten wir durch zeitliche Mittelung der Radialgeschwindigkeit:

$$\Delta r = v_r \Delta t = \frac{L\sin\varphi}{\mu q}\sqrt{1-\frac{q}{a}}\Delta t = \frac{L\varepsilon\sin\varphi}{\mu q}\Delta t.$$

Der mittlere Bahnradius eines Elektrons ergibt sich, wenn wir Ellipsenfläche und Kreisfläche einander gleichsetzen:

$$\pi ab = \pi R^2$$

bzw. $R = \sqrt{ab}$. Mit den Notationen

$$a^2 = \frac{q^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2}, \quad b^2 = aq = \frac{q^2}{1-\varepsilon^2}, \quad R^2 = ab = \frac{q^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}^3}$$

folgt der mittlere Bahnradius $\langle r \rangle$ im Koordinatensystem der Ellipse. Er hängt nur von der Exzentrizität ab und ist näherungsweise gleich dem Halbparameter:

[3] Wir sehen sofort, daß es in Richtung wachsender Winkel keine Unschärfen bei der Messung der Variablen gibt.

$$
\begin{aligned}
\langle r\rangle^2 &= ab + a^2 - b^2 - 2b\sqrt{a^2 - ab} \\
&= q^2\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}^3} + \frac{1}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} - 2\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sqrt{\frac{1}{\left(1-\varepsilon^2\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}^3}}\right\} \\
&\approx q^2\left(1 - \sqrt{2}\varepsilon + \frac{5}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\varepsilon^3\right) \approx q^2.
\end{aligned}
$$

Der mittlere Bahnradius $\langle r\rangle$ ist also kleiner als *a*, aber größer als *b*. Setzen wir

$$
\varphi = \dot{\varphi}t = \frac{L}{\mu r^2}t \approx \frac{Lt}{\mu q^2} \equiv \omega t,
$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta r\rangle &\approx \frac{L\varepsilon}{\mu q}\frac{1}{T}\int_0^T t\sin\frac{Lt}{\mu q^2}dt = \varepsilon q\frac{1}{T}\left[\frac{\mu q^2}{L}\sin\frac{Lt}{\mu q^2} - t\cos\frac{Lt}{\mu q^2}\right]_0^T \\
&= \varepsilon q\left[\frac{\mu q^2}{LT}\sin\frac{LT}{\mu q^2} - \cos\frac{LT}{\mu q^2}\right] = \varepsilon q\left[\frac{\sin\omega T}{\omega T} - \cos\omega T\right] = -\varepsilon q.
\end{aligned}
$$

Durch Quadrieren der Bewegungsgleichung

$$
\Delta r^2 = v_r^2\Delta t^2 = \frac{L^2\varepsilon^2}{\mu^2 q^2}t^2\sin^2\frac{Lt}{\mu q^2}
$$

erhalten wir den quadratischen Mittelwert

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta r^2\rangle &\approx \frac{L^2\varepsilon^2}{\mu^2 q^2}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\sin^2\frac{Lt}{\mu q^2}dt = \frac{L^2\varepsilon^2}{2\mu^2 q^2}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\left(1 - \cos\frac{2Lt}{\mu q^2}\right)dt \\
&= \frac{L^2\varepsilon^2}{2\mu^2 q^2}\frac{1}{T}\int_0^T t^2 dt - \frac{L^2\varepsilon^2}{2\mu^2 q^2}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{2Lt}{\mu q^2}dt.
\end{aligned}
$$

Die Integration ergibt

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta r^2\rangle &= \frac{L^2T^2\varepsilon^2}{6\mu^2 q^2} - \frac{L^2T^2\varepsilon^2}{2\mu^2 q^2}\frac{1}{T^3}\left[\frac{2\mu^2 q^4 t}{4L^2}\cos\frac{2Lt}{\mu q^2} + \frac{\mu q^2 t^2}{2L}\sin\frac{2Lt}{\mu q^2} - \frac{2\mu^3 q^6}{8L^3}\sin\frac{2Lt}{\mu q^2}\right]_0^T \\
&= \frac{q^2\omega^2T^2\varepsilon^2}{6} - \frac{q^2\omega^2T^2\varepsilon^2}{2}\left[\frac{1}{2\omega^2T^2}\cos 2\omega T + \frac{1}{2\omega T}\sin 2\omega T - \frac{1}{4\omega^3T^3}\sin 2\omega T\right],
\end{aligned}
$$

womit wir als Endresultat erhalten:

$$\left\langle \Delta r^2 \right\rangle = \frac{q^2\omega^2 T^2 \varepsilon^2}{6} - \frac{q^2\varepsilon^2}{4} = q^2\varepsilon^2\left(\frac{\omega^2 T^2}{6} - \frac{1}{4}\right) = q^2\varepsilon^2\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$\approx q^2\varepsilon^2\left(6 - \frac{1}{4}\right) = \frac{23}{4}q^2\varepsilon^2 \approx 6q^2\varepsilon^2.$$

Mit der Impulsänderung verfahren wir genauso:

$$\Delta p_r = \mu\ddot{r}\Delta t = \mu\left(-\frac{L^2}{\mu^2 q}\frac{1}{r^2} + \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right)\Delta t = \frac{L^2}{\mu q}\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{q}{r^3}\right)\Delta t$$
$$= \frac{L^2}{\mu q^3}\left(\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^3 - \left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2\right)\Delta t = \frac{L^2\varepsilon\cos\varphi\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^2}{\mu q^3}\Delta t$$
$$= \frac{L^2\varepsilon\cos\varphi\left(1+2\varepsilon\cos\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi\right)^2}{\mu q^3}\Delta t = \frac{L^2\varepsilon}{\mu q^3}\left(\cos\varphi + 2\varepsilon\cos^2\varphi + \varepsilon^2\cos^3\varphi\right)\Delta t$$
$$= \frac{L^2\varepsilon}{\mu q^3}\left(\varepsilon + \left(1+\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\cos\varphi + \varepsilon\cos 2\varphi + \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos 3\varphi\right)\Delta t.$$

Die arithmetische Mittelung ergibt

$$\left\langle \Delta p_r \right\rangle = \frac{L^2\varepsilon}{\mu q^3}\frac{1}{T}\int_0^T t\left(\varepsilon + \left(1+\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\cos\frac{Lt}{\mu q^2} + \varepsilon\cos\frac{2Lt}{\mu q^2} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\cos\frac{3Lt}{\mu q^2}\right)dt = \frac{L^2 T\varepsilon^2}{2\mu q^3}$$
$$+ \frac{L^2\varepsilon}{\mu q^3}\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T t\cos\frac{Lt}{\mu q^2}dt + \frac{L^2\varepsilon^2}{\mu q^3}\frac{1}{T}\int_0^T t\cos\frac{2Lt}{\mu q^2}dt + \frac{L^2\varepsilon^3}{4\mu q^3}\frac{1}{T}\int_0^T t\cos\frac{3Lt}{\mu q^2}dt$$
$$= \frac{L^2\varepsilon^2}{2\mu q^3}T = \frac{L\varepsilon^2}{2\mu q^3}\mu q^2\omega T \approx \frac{3L}{q}\varepsilon^2,$$

da die Integrale identisch verschwinden. Die quadratische Mittelung erfordert etwas mehr Aufwand, da wir höhere Potenzen des Kosinus benötigen. Zunächst ist

$$\Delta p_r^2 = \frac{L^4\varepsilon^2\cos^2\varphi\left(1+\varepsilon\cos\varphi\right)^4}{\mu^2 q^6}t^2 = \frac{L^4\varepsilon^2}{\mu^2 q^6}t^2$$
$$\times\left(\cos^2\varphi + 4\varepsilon\cos^3\varphi + 7\varepsilon^2\cos^4\varphi + 2\varepsilon^3\cos^5\varphi + \varepsilon^4\cos^6\varphi\right).$$

Neben den bekannten trigonometrischen Beziehungen

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right), \qquad \cos^3\varphi = \frac{1}{4}\left(3\cos\varphi + \cos 3\varphi\right),$$
$$\cos^4\varphi = \frac{1}{8}\left(3+4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi\right), \quad \cos^5\varphi = \frac{1}{16}\left(10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi\right)$$

benötigen wir noch die 6. Potenz des Kosinus:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{32}\left(10 + 15\cos 2\varphi + 6\cos 4\varphi + \cos 6\varphi\right).$$

Damit erhalten wir schließlich die folgende Potenzreihe:

$$\Delta p_r^2 = \frac{L^4\varepsilon^2}{2\mu^2 q^6} t^2 \left(1 + \frac{21}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{8}\varepsilon^4 + \left(6 + \frac{5}{2}\varepsilon^2\right)\varepsilon\cos\varphi + \left(1 + 7\varepsilon^2 + \frac{15}{16}\varepsilon^4\right)\cos 2\varphi \right.$$
$$\left. + \left(2 + \frac{5}{4}\varepsilon^2\right)\varepsilon\cos 3\varphi + \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\varepsilon^2\cos 4\varphi + \frac{1}{4}\varepsilon^3\cos 5\varphi + \frac{1}{16}\varepsilon^4\cos 6\varphi\right).$$

Somit ergibt sich der quadratische Mittelwert des Impulses aus einer Summe von Integralen,

$$\left\langle \Delta p_r^2 \right\rangle = \frac{L^4\varepsilon^2}{2\mu^2 q^6}\left(\left(1 + \frac{21}{4}\varepsilon^2 + \frac{5}{8}\varepsilon^4\right)\frac{1}{T}\int_0^T t^2 dt + \left(6 + \frac{5}{2}\varepsilon^2\right)\frac{\varepsilon}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{Lt}{\mu q^2}dt\right.$$
$$+ \left(1 + 7\varepsilon^2 + \frac{15}{16}\varepsilon^4\right)\frac{1}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{2Lt}{\mu q^2}dt + \left(2 + \frac{5}{4}\varepsilon^2\right)\frac{\varepsilon}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{3Lt}{\mu q^2}dt$$
$$\left. + \left(\frac{7}{4} + \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\frac{\varepsilon^2}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{4Lt}{\mu q^2}dt + \frac{\varepsilon^3}{4}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{5Lt}{\mu q^2}dt + \frac{\varepsilon^4}{16}\frac{1}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{6Lt}{\mu q^2}dt\right).$$

Integrale dieser Form haben die geschlossene Lösung

$$\frac{1}{T}\int_0^T t^2\cos\frac{nLt}{\mu q^2}dt = \frac{1}{T}\left[\frac{2\mu^2 q^4 t}{n^2L^2}\cos\frac{nLt}{\mu q^2} + \left(\frac{\mu q^2 t^2}{nL} - \frac{2\mu^3 q^6}{n^3L^3}\right)\sin\frac{nLt}{\mu q^2}\right]_0^T$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{2\mu^2 q^4 T}{n^2L^2}\cos\frac{nLT}{\mu q^2} + \left(\frac{\mu q^2 T^2}{nL} - \frac{2\mu^3 q^6}{n^3L^3}\right)\sin\frac{nLT}{\mu q^2}\right]$$
$$\approx \frac{1}{T}\left[\frac{2T}{n^2\omega^2}\cos n\omega T + \left(\frac{T^2}{n\omega} - \frac{2}{n^3\omega^3}\right)\sin n\omega T\right] = \frac{2}{n^2\omega^2},$$

womit wir einen etwas länglichen Ausdruck erhalten,

$$\left\langle \Delta p_r^2 \right\rangle = \frac{L^2\varepsilon^2}{2q^2}\left[\pi^2\left(\frac{4}{3} + 7\varepsilon^2 + \frac{5}{6}\varepsilon^4\right) + \frac{1}{2} + 12\left(1 + \frac{1}{27}\right)\varepsilon + 7\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right)\varepsilon^2\right.$$
$$\left. + 5\left(1 + \frac{1}{18} + \frac{1}{250}\right)\varepsilon^3 + \left(\frac{33}{64} + \frac{1}{288}\right)\varepsilon^4\right].$$

Indem wir kleine Terme vernachlässigen, vereinfacht sich das Ergebnis bis zu Termen erster Ordnung wie folgt:

$$\left\langle \Delta p_r^2 \right\rangle \approx \frac{L^2\varepsilon^2}{2q^2}\left(\pi^2\left(\frac{4}{3} + 7\varepsilon^2 + \frac{5}{6}\varepsilon^4\right) + \frac{1}{2} + 12\varepsilon + \frac{7}{2}\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + \frac{33}{64}\varepsilon^4\right)$$
$$\approx \frac{L^2\varepsilon^2}{2q^2}\left(\frac{4}{3}\pi^2 + \frac{1}{2} + 12\varepsilon\right) \approx \frac{6L^2\varepsilon^2}{q^2}.$$

Damit liefern die Unschärfen die folgenden Ergebnisse

$$\Delta r = \sqrt{\left\langle \Delta r^2 \right\rangle - \left\langle \Delta r \right\rangle^2} = \sqrt{6\varepsilon^2 q^2 - \varepsilon^2 q^2} \approx \sqrt{5}\varepsilon q,$$
$$\Delta p_r = \sqrt{\left\langle \Delta p_r^2 \right\rangle - \left\langle \Delta p_r \right\rangle^2} = \frac{\sqrt{6}L\varepsilon}{q}\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2}.$$

Multiplizieren wir die beiden Angaben, erhalten wir mit den Mitteln der klassischen Mechanik die folgende Unschärferelation in radialer Richtung:

$$\Delta r \Delta p_r \approx \sqrt{30}L\varepsilon^2\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2} \approx \frac{11}{2}L\varepsilon^2\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2} \approx \frac{L}{2}.$$

Wenn wir $L = \hbar$ setzen, ergibt sich für leichte Abweichungen von der Kreisbahn mit $\varepsilon = 0,3$ der bekannte Wert der Heisenbergschen Unschärferelation von $\Delta r \Delta p_r \geq \hbar/2$. Für $\varepsilon = 0$ ist keine Unschärfe vorhanden, und der Wert der Parabelbahn mit $\varepsilon = 1$ kann nicht erreicht werden, denn nach obiger Gleichung kann ε nicht größer werden als 0,8:

$$\varepsilon < \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8.$$

Differenzieren wir die Unschärfe nach ε,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Delta r \Delta p_r = 2\sqrt{30}L\varepsilon\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt{30}L\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2}},$$

ergibt sich eine Nullstelle bei $\varepsilon = 2/3$. Bilden wir die zweite Ableitung,

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Delta r \Delta p_r = 2\sqrt{30}L\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2} - \frac{15}{2}\sqrt{30}L\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2}} - \frac{9}{4}\sqrt{30}L\frac{\varepsilon^4}{\sqrt{1-\frac{3}{2}\varepsilon^2}^{\,3}},$$

und setzen den Wert an der Nullstelle ein,

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}\Delta r \Delta p_r = -12\sqrt{10}L < 0,$$

stellen wir fest, daß es sich um ein relatives Maximum handelt. Das Elektron kann also den Wert $\varepsilon = 1$ einer Parabel nicht annehmen, es bleibt im Atom bei einer oberen Grenzenergie

$$E_{\max} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-\varepsilon_{\max}^2}{2}\frac{e^2}{q} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{18}\frac{e^2}{q} \approx -\frac{\mu e^4}{48\pi^2\varepsilon_0^2 L^2}$$

gebunden und bewegt sich innerhalb der Grenzen $E_{\min} < E < E_{\max}$. Also kann die Unschärfe nicht beliebig groß werden. Setzen wir das maximale ε ein, ergibt sich

$$\Delta r \Delta p_r \approx \frac{4}{9}\sqrt{10}L \approx L.$$

Dieses Phänomen bezeichnet man in der Quantenmechanik als die Heisenbergsche Unschärferelation. Es sei darauf verwiesen, daß das Plancksche Wirkungsquantum lediglich eine Naturkonstante ist, der Rest ist Vektoraddition. Auf einer Ellipse ist die Energie negativ, und die große Halbachse weist damit einen endlichen Wert auf. Da die Energie erhalten bleibt, ist auch die große Halbachse konstant. Würde das Elektron als beschleunigte Ladung Energie verlieren, würde seine Bahn in Richtung einer Parabel wandern, es würde also nicht in den Kern stürzen, sondern sich umgekehrt immer weiter vom Kern entfernen. Ein solches Atom wäre nicht stabil, was gegen den experimentellen Befund spricht. Wie wir oben gezeigt haben, kann allerdings die Unschärfe auch nicht beliebig groß werden, da das beschleunigte Elektron ohne zu strahlen bei seinem Kern bleibt, wenn es einmal eingefangen wurde. Selbst wenn es durch Strahlung Energie verlieren sollte, bliebe der Drehimpuls erhalten, auch wenn sich Ortsvektor und Impuls dabei ändern. Ein strahlendes Elektron würde von seiner Umlaufbahn immer weiter nach außen wandern, denn wenn die Energie durch Strahlungsverluste immer kleiner wird, wird der Kehrwert, der proportional zur großen Halbachse ist, immer größer. Bohrsche Atomradien, auf denen das Elektron strahlen und Energie abgeben könnte, existieren also nicht, denn E kann nicht null werden, also kann auch der Kehrwert a nicht gegen Unendlich streben. Daß es zwei Grenzfrequenzen gibt, zeigt, daß die quantenmechanische Unschärfe nichts anderes als ein Resonanzphänomen der Wellenlehre ist, und die quantenmechanische Unschärfe nichts anderes als die Bandbreite des Übergangs.

Nun ist auch klar, warum die Quantenmechanik nur Aufenthaltswahrscheinlichkeiten angeben kann. Das liegt daran, daß das Elektron einmal näher beim Kern, ein anderes Mal wieder etwas weiter davon weg ist. Dies stellt keinen Widerspruch zur Quantenmechanik dar und ist lediglich eine gewisse Vergröberung, nur kann man mit Wahrscheinlichkeiten eben nicht viel anfangen. Besser wäre es daher, anstatt über Unschärfen über Linienbreiten zu reden.

Etwas Grundsätzliches noch. Warum sollte es zwei verschiedene Arten von Physik geben? Nach allem, was man weiß, sind die Naturgesetze universell, im großen wie im kleinen. An der Vorstellung von Atomorbitalen und quantisierten Energieniveaus ändert diese Sichtweise nichts. Nur verpflichtet ein quantisierter Energiezustand ein Elektron aufgrund seiner Resonanzfrequenz, quasi als Gefangener, länger in seiner Umlaufbahn zu verweilen. Man kann Elektronen eben nicht als die Kometen des Mikrokosmos ansehen, die ab und zu vorbeikommen, einige Umdrehungen um den Kern durchlaufen und sich bei genügend großem Energieverlust wieder aus dem Staube machen.

