

# Physikaufgabe 147

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Zeigen Sie, daß der Flächensatz kein geeignetes Mittel ist, um Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig scharf zu messen.

**Beweis:** Als Werner Heisenberg 1927 seine Unschärferelation herleitete, ging er von der Konstanz des Drehimpulses aus:

$$\begin{aligned}L_z &= rp \sin \theta = (r + \Delta r)(p + \Delta p) \sin(\theta + \Delta \theta) \\ &= (rp + r\Delta p + p\Delta r + \Delta r\Delta p)(\sin \theta \cos \Delta \theta + \cos \theta \sin \Delta \theta) \\ &\approx (rp + r\Delta p + p\Delta r + \Delta r\Delta p) \sin \theta,\end{aligned}$$

wobei  $r$  der radiale Abstand vom Brennpunkt einer Ellipse und  $p$  der Bahndrehimpuls ist. Lediglich für eine Kreisbahn gilt, daß der von beiden Vektoren eingeschlossene Winkel  $\theta$  gleich  $90^\circ$  ist. Durch Gleichsetzen erhält man  $\Delta r\Delta p \approx -(r\Delta p + p\Delta r)$ . Da das totale Differential des Drehimpulses verschwinden muß, gilt

$$\Delta L_z = (r\Delta p + p\Delta r) \sin \theta + rp \cos \theta \Delta \theta = 0$$

bzw.

$$-(r\Delta p + p\Delta r) = \frac{rp \cos \theta \Delta \theta}{\sin \theta} = \frac{L_z \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Delta \theta.$$

Daraus folgt für den allgemeinen Fall sowohl makroskopisch als auch mikroskopisch die folgende Unschärfe:<sup>1</sup>

$$\Delta r\Delta p \approx \frac{L_z \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Delta \theta.$$

Dieser Ausdruck ist im allgemeinen ungleich null. Das ist auch der Grund, weshalb das Bohrsche Atommodell mit der Unschärferelation nicht kompatibel ist – weil Niels Bohr nämlich Kreisbahnen annahm. Die wahren Bahnen im Atom sind allerdings ebenso wie die Keplerbahnen Ellipsen, da die Naturgesetze universell sind. Die Quantisierung des Impulses, einer energetischen Größe, bleibt davon unbenommen. Sowohl für Kreis- als auch für Ellipsenbahnen gilt der Flächensatz in seiner integralen Form,

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t |\mathbf{r}(\varphi(t)) \times \mathbf{v}(\varphi(t))| dt = \frac{L_z}{2m} \int_{t_0}^t dt = \frac{L_z}{2m} (t - t_0).$$

Die differentielle Form lautet

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_z}{2m}.$$

---

<sup>1</sup> Ein Term zweiter Ordnung

## Physikaufgabe 147

---

Ein voller Umlauf entspricht einer Fläche

$$A = \frac{L_z}{2m} \int_0^T dt = \frac{L_z T}{2m} = \frac{L_z}{2m} \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = \pi ab.$$

Daraus folgt der Drehimpuls der Ellipse zu

$$L_z = m\bar{\omega}ab = \frac{2m\pi ab}{T} = \frac{2mA}{T}.$$

Er ist demnach proportional zur Flächengeschwindigkeit

$$L_z = 2m \frac{dA}{dt} = m |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|,$$

womit die Heisenbergsche Unschärferelation nichts anderes ist als der Flächensatz, also das zweite Keplersche Gesetz auf den Mikrokosmos angewandt:

$$\Delta r \Delta p \approx 2m\dot{A} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \Delta \theta.$$

Wir zeigen das am Beispiel einer Ellipse. Deren Radialgleichung in ebenen Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  lautet

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

wobei  $p = b^2/a$  der Halbparameter und  $\varepsilon = e/a$  die numerische Exzentrizität mit  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  ist. Um eine Verwechslung mit dem Impuls zu vermeiden, verwenden wir diese Gleichung ausschließlich in der Form

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi}.$$

In kartesischen Koordinaten gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

wobei der Radius vom Polarwinkel  $\varphi$  abhängt. Parametrisieren wir nach der Zeit  $t$ , folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Der Drehimpuls ist somit gegeben durch

$$L_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi}.$$

## Physikaufgabe 147

---

Da er konstant ist, gilt ferner  $\dot{L}_z = 2mr\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0$ . Der Betrag des Impulses errechnet sich damit aus der Bahngeschwindigkeit,

$$p = mv = m\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}.$$

Die Berechnung der Kraft erfolgt über das totale Differential

$$\begin{aligned} dp &= m \frac{\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} dt = m \frac{\dot{r}\ddot{r} + \dot{\varphi}(r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi})}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} dt \\ &= m \frac{\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi})}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} dt = m \frac{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}} r dt. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$F = \frac{dp}{dt} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \frac{r}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}.$$

Um nun die einzelnen Größen zu berechnen, differenzieren wir zunächst die Radialgleichung nach der Zeit,

$$\dot{r} = -\dot{\varphi} \frac{b^2}{(a - \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi)^2} \sqrt{a^2 - b^2} \sin \varphi = -r^2 \dot{\varphi} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \sin \varphi = -\frac{L_z a}{mb^2} \varepsilon \sin \varphi.$$

Die Winkelgeschwindigkeit folgt schließlich aus der Drehimpulserhaltung,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2},$$

und daraus leitet sich die Azimutalgeschwindigkeit her,

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{L_z a}{mb^2} (1 - \varepsilon \cos \varphi).$$

Somit ergibt sich eine Bahngeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \frac{L_z a}{mb^2} \sqrt{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} = \frac{L_z a}{mb^2} \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}$$

und damit der Impuls

$$p(\varphi) = mv = \frac{L_z a}{b^2} \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}.$$

Er ist für eine Masse von  $m = 1$  und eine Umlaufdauer von  $T = 1$  in Abb. 1 dargestellt.

## Physikaufgabe 147

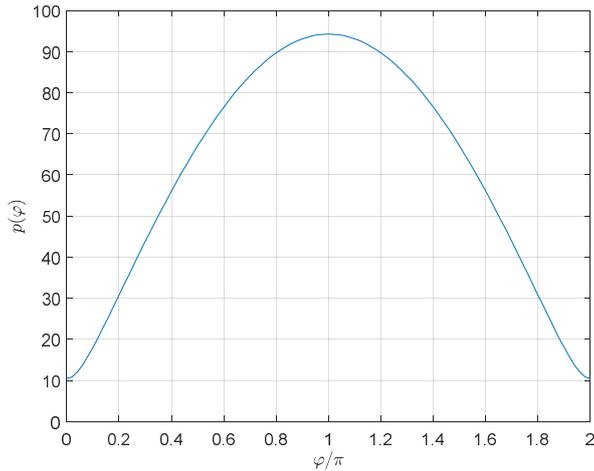


Abbildung 1. Impuls der Bahnbewegung auf einer Ellipse

Zur Berechnung des Winkels zwischen Orts- und Impulsvektor formen wir den Ortsvektor wie folgt um:

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}}.$$

Er ist graphisch in Abb. 2 dargestellt und hat ein Minimum bei  $\varphi = \pi$ .

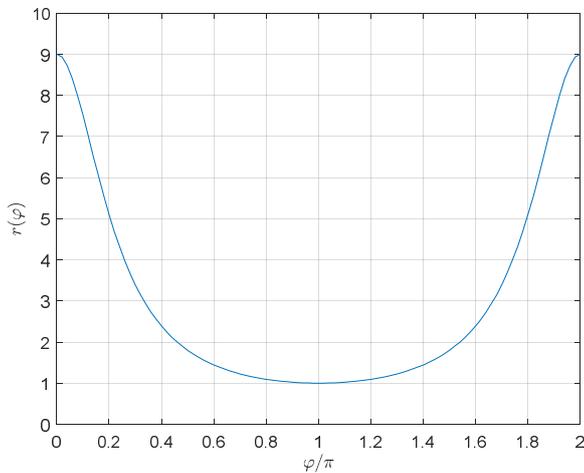


Abbildung 2. Ortsvektor der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten

Multiplizieren wir Orts- und Impulsbetrag, folgt

$$L_z = r(\varphi) p(\varphi) \frac{\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}}{\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + a^2 - b^2}} = r(\varphi) p_{\perp}(\varphi).$$

Durch Vergleich mit der Definition des Drehimpulses ergibt sich für die senkrechte Komponente des Impulses der Ausdruck

## Physikaufgabe 147

$$p_{\perp}(\varphi) = p(\varphi) \sin(\theta(\varphi)) = \frac{L_z}{b^2} \sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}$$

und nach Einsetzen in die letzte Gleichung der Sinus des Winkels zwischen Orts- und Impulsvektor:

$$\sin(\theta(\varphi)) = \frac{\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + (a^2 - b^2) \cos^2 \varphi}}{\sqrt{a^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + a^2 - b^2}}.$$

Den Winkel  $\theta$  erhalten wir aus der Umkehrfunktion,

$$\theta(\varphi) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}.$$

Er ist in Abb. 3 dargestellt und besitzt Extremwerte bei ca.  $36^\circ$  und  $324^\circ$ .<sup>2</sup>

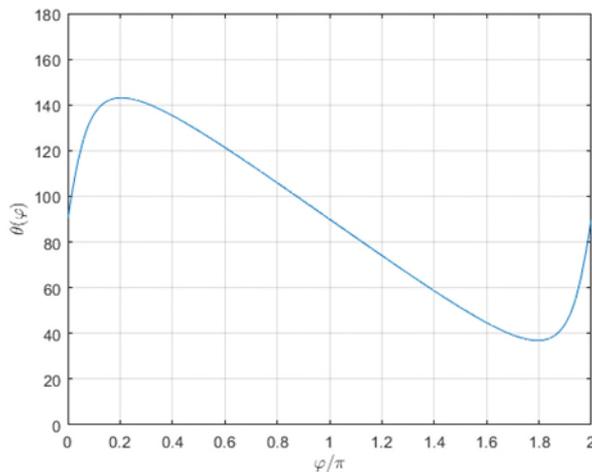


Abbildung 3. Winkel zwischen Orts- und Impulsvektor des Drehimpulses

Spezielle Werte sind:

$$\theta(0) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(\pi/2) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}},$$

$$\theta(\pi) = \arcsin \sqrt{\frac{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(3\pi/2) = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

Bilden wir die Ableitung von  $\theta$  nach  $\varphi$ , ergibt sich ein vollständig integrierbarer Ausdruck,

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \cos \varphi)}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2},$$

<sup>2</sup> Auf eine Herleitung wurde aus Gründen der Unergiebigkeit verzichtet.

## Physikaufgabe 147

der in den Grenzen zwischen 0 und  $\pi$  folgenden Wert ergibt:

$$\Delta\theta_1 = \varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} - \varepsilon \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} d\varphi.$$

Da das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} = -\frac{\pi}{2\varepsilon} + \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2},$$

ergibt sich

$$\Delta\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2},$$

und mit dem Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} &= \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \left[ \arctan \frac{(1 + \varepsilon)^2 \tan \varphi / 2}{1 - \varepsilon^2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{1 - \varepsilon^2} \arctan \frac{(1 + \varepsilon) \tan \pi / 2}{1 - \varepsilon} = \frac{\pi}{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

folgt  $\Delta\theta_1 = 0$ . Aus Symmetriegründen ist ebenfalls

$$\Delta\theta_2 = \varepsilon^2 \int_\pi^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} - \varepsilon \int_\pi^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} d\varphi = 0,$$

so daß  $\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 0$  und damit im Mittel  $\Delta r \Delta p = 0$ . Anders sieht es aus, wenn nur über ein infinitesimales Winkelelement  $\Delta\varphi$  integriert wird:

$$\Delta\theta_1 = \varepsilon^2 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} - \varepsilon \int_0^{\Delta\varphi} \frac{\cos \varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} d\varphi.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \varepsilon^2 \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} + \left[ \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\Delta\varphi} - \frac{1 + \varepsilon^2}{2} \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} \\ &= \frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \int_0^{\Delta\varphi} \frac{d\varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2} \left( 1 - \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) = -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \Delta\varphi, \end{aligned}$$

und mit dem Gesamtdrehimpuls des Elektrons können wir die Unschärferelation mittels der Relationen

## Physikaufgabe 147

---

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} \quad \text{und} \quad \cos \theta = \frac{\varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}$$

als Funktion der Flächengeschwindigkeit angeben:

$$\Delta r \Delta p \approx \frac{L_z \cos \theta}{\sin^2 \theta} \Delta \theta = -2m\Delta A \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{1 - \varepsilon}.$$

Diesen Ausdruck können wir weiter umformen zu

$$\begin{aligned} \Delta r \Delta p &= -2\Delta A \frac{L_z}{r^2} \frac{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi}{1 - \varepsilon} \\ &= -\frac{2e^2 \Delta A \sin \varphi \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}{b^4 (1 - \varepsilon)} L_z. \end{aligned}$$

Die normierte Unschärferelation ist als Funktion des Polarwinkels in Abb. 4 dargestellt.

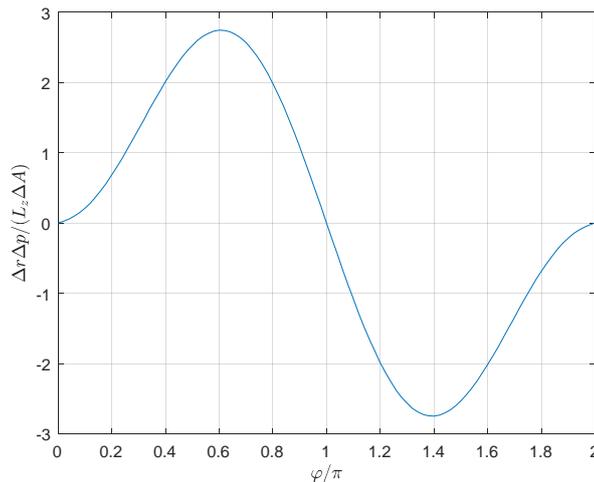


Abbildung 4. Der Verlauf der Unschärferelation (positiv normiert) als Funktion des Polarwinkels

Sie ist null für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  und wird maximal für  $\varphi \approx \pi/2$ :

$$\Delta r \Delta p = -\frac{2e^2 \Delta A \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{b^4 (1 - \varepsilon)} L_z.$$

Setzen wir in die winkelabhängige Ellipsengleichung die Ellipsenfläche ein, so folgt

$$\Delta r \Delta p = -\frac{2\pi\varepsilon^2 a^3}{b^3 (1 - \varepsilon)} \sin \varphi \sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2} L_z.$$

## Physikaufgabe 147

Das negative Vorzeichen und die Winkelabhängigkeit kann man zum Verschwinden bringen, indem man statt der Differenzen die quadratischen Mittelwerte bzw. die Varianzen bildet, wie Heisenberg es getan hat:

$$\begin{aligned}\Delta r^2 \Delta p^2 &= \frac{4\pi^2 a^6 \varepsilon^4 L_z^2}{b^6 (1-\varepsilon)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2) d\varphi \\ &= \frac{2\pi a^6 \varepsilon^4 (1 + \varepsilon^2) L_z^2}{b^6 (1-\varepsilon)^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{2\pi^2 a^6 \varepsilon^4 (1 + \varepsilon^2)}{b^6 (1-\varepsilon)^2} L_z^2\end{aligned}$$

bzw.

$$\Delta r \Delta p = \frac{\sqrt{2\pi} a^3 \varepsilon^2 \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{b^3 (1-\varepsilon)} L_z.$$

Für den Grundzustand  $l = 0$  hat der Drehimpuls des Elektrons keinen Bahndrehimpuls, sondern nur einen Spin, d.h.  $L_z = \hbar/2$ , und damit ist

$$\Delta r \Delta p = \frac{\sqrt{2\pi} \varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} \frac{\hbar}{2} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Um der Unschärferelation zu genügen, muß die Funktion

$$f(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2\pi} \varepsilon^2}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} \geq 1$$

sein. Das ist gemäß Tab. 1 erst für  $\varepsilon \geq 0,477$  erfüllt, was darauf hindeutet, daß die Bahnen im Atom doch sehr stark von der Kreisbahn abweichen müssen. Je kreisförmiger die Bahn, desto besser eignet sie sich für die gleichzeitige Messung von Ort und Impuls. Mithin ist eine hohe Unschärfe nur für sehr exzentrische Bahnen vorhanden. Eine Untergrenze durch die Quantisierung gibt es praktisch nicht.

$a$	$b$	$e$	$\varepsilon$	$f(\varepsilon)$
5	5	0	0	0
5	4,8	1,4	0,28	0,18
5	4,6	1,96	0,39	0,49
5	4,4	2,37	0,47	0,99
5	4,2	2,71	0,54	1,75
5	4	3	0,6	2,90
5	3	4	0,8	26,8

Tabelle 1. Unschärfe als Funktion der numerischen Exzentrizität

## Physikaufgabe 147

---

Im folgenden wollen wir noch die Kraftwirkung auf das Elektron berechnen. Aus der Drehimpulserhaltung  $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$  folgt als erstes die Winkelbeschleunigung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = -\frac{2}{mr^3}\dot{r}mr^2\dot{\varphi} = -\frac{2L_z}{m} \frac{\dot{r}}{r^3}$$

bzw. nach Einsetzen der Radialgeschwindigkeit

$$\ddot{\varphi} = \frac{2L_z^2}{m^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin \varphi}{b^2 r^3}.$$

Nochmalige Differentiation der Radialgeschwindigkeit liefert schließlich die Radialbeschleunigung

$$\ddot{r} = -\frac{L_z}{mb^2} \sqrt{a^2 - b^2} \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -\frac{L_z \dot{\varphi}}{b^2} \left( \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi + a - \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi \right) \\ &= -\dot{\varphi} \frac{L_z a}{b^2} = -\frac{L_z a}{mb^2} \frac{1}{r^2} = -\frac{L_z^2 a^3}{mb^6} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\dot{r}}{v} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + (a - \sqrt{a^2 - b^2} \cos \varphi)^2}} = -\frac{\varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}$$

erhalten wir schließlich die Kraft

$$F(\varphi) = \frac{L_z^2 a^3}{m b^6} \frac{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 \varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}} = m\bar{\omega}^2 \frac{a^5}{b^4} \frac{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 \varepsilon \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\varepsilon \cos \varphi + \varepsilon^2}}.$$

Sie ist in Abb. 5 als Funktion des Polarwinkels dargestellt, und ihr Maximum liegt bei ca.  $126^\circ$ .<sup>3</sup> Spezielle Werte sind

$$\begin{aligned} F(\pi/2) &= m\bar{\omega}^2 \frac{a^5}{b^4} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, & F(\pi) &= m\bar{\omega}^2 \frac{a^5}{b^4} \varepsilon (1 + \varepsilon) \sin \pi = 0, \\ F(3\pi/2) &= -m\bar{\omega}^2 \frac{a^5}{b^4} \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, & F(2\pi) &= m\bar{\omega}^2 \frac{a^5}{b^4} \varepsilon (1 - \varepsilon) \sin 2\pi = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> Auf eine genaue Bestimmung wurde verzichtet.

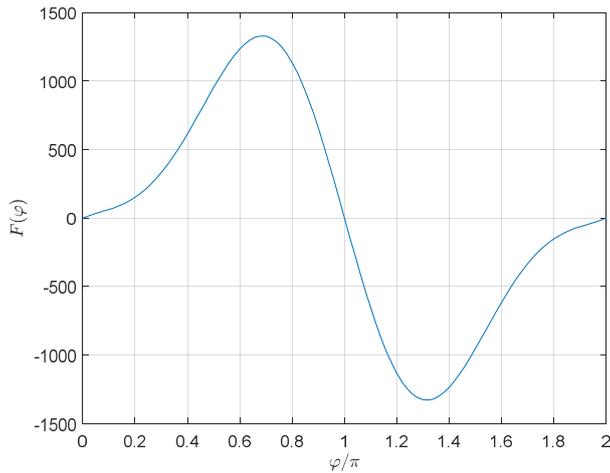


Abbildung 5. Kraft auf der Ellipsenumlaufbahn

Der Flächensatz ist also zur gleichzeitigen Bestimmung von Ort und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens denkbar ungeeignet, zumal ja über die Kraft, sofern man nicht quadratisch mittelt, Ort und Impuls mit der gleichen Präzision gemessen werden können. Aus der Definition der Kraft

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{c \Delta p}{c \Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta r}$$

folgt nämlich, daß Impuls- und Zeitunschärfe

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = \frac{F}{c} \Delta r \quad \text{bzw.} \quad \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{1}{Fc} \Delta E$$

genauso scharf gemessen bzw. umgerechnet werden können wie Orts- und Energieunschärfe, zumal die Kraft auf ein Teilchen nur vom Polarwinkel und damit nur von der Kraftrichtung abhängt. Wenn man für die Messung allerdings den Flächensatz verwendet, wie Heisenberg es getan hat, ergibt sich daraus ein völlig falsches Bild. Klassische Mechanik und Quantenmechanik können sich nämlich aufgrund der Universalität der Naturgesetze gar nicht so grundlegend voneinander unterscheiden, wie es die Quantenmechanik suggeriert. Ferner würde, falls dies der Fall wäre, anstelle des Determinismus ein geisterhafter Sprungversatz der ersten Ableitung des Ortes nahegelegt, was allen Regeln der Logik zuwiderläuft. Eine Quantisierung der gebundenen Energiezustände des Wasserstoffatoms ist durch Mittelwertbildung auch für Ellipsenbahnen möglich und beschränkt sich definitiv nicht auf die Kreisbewegung.

## Anhang

```
% Flächensatz
clear all
```

```
a = 5;
b = 3;
e = sqrt(a^2 - b^2);
eps = e/a;
T = 1;
```

## Physikaufgabe 147

---

```
m = 1;

n = 101;
for i = 1:n
    phi(i) = (i-1)*2*pi/(n-1);
    phi_rel(i) = phi(i)/pi;
    r(i) = b^2/a/(1 - eps*cos(phi(i)));
    sin_theta(i) = sqrt(1-2*eps*cos(phi(i)) + eps^2*cos(phi(i))^2)/sqrt(1-
2*eps*cos(phi(i)) + eps^2);
    v(i) = 2*pi*a^2/b*sqrt(1-2*eps*cos(phi(i))+eps^2);
    F(i) = m*4*pi^2/T^2*a^4/b^4*e*(1-eps*cos(phi(i)))^2/sqrt(1-
2*eps*cos(phi(i))+eps^2)*sin(phi(i));
    if phi(i) >= 0 && phi(i) < pi
        theta(i) = 180 - 180/pi*asin(sin_theta(i));
    else
        theta(i) = 180/pi*asin(sin_theta(i));
    end
    U(i) = 2*e^2*sqrt(1-2*eps*cos(phi(i))+eps^2)/b^4/(1-eps)*sin(phi(i));
end

figure(1)
plot(phi_rel,v)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$p(\varphi)$', 'interpreter', 'latex')
ylim([0 100])
grid on

figure(2)
plot(phi_rel,F)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$F(\varphi)$', 'interpreter', 'latex')
% ylim([0 10])
grid on

figure(3)
plot(phi_rel,r)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$r(\varphi)$', 'interpreter', 'latex')
ylim([0 10])
grid on

figure(4)
plot(phi_rel,sin_theta)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\sin(\theta(\varphi))$', 'interpreter', 'latex')
ylim([0 1])
grid on

figure(5)
plot(phi_rel,theta)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\theta(\varphi)$', 'interpreter', 'latex')
ylim([0 180])
grid on

figure(6)
plot(phi_rel,U)
xlabel('$\varphi/\pi$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\Delta r \Delta p / (L_z \Delta A)$', 'interpreter', 'latex')
grid on
```