Aufgabe: Beschreiben Sie den Urknall quantenmechanisch.

Lösung: Wir vereinfachen das Problem, indem wir den Raum ohne Beschränkung der Allgemeinheit dreidimensional annehmen. Der Lichtkegel (Abb.1)

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2$$

läßt sich dadurch besser veranschaulichen.

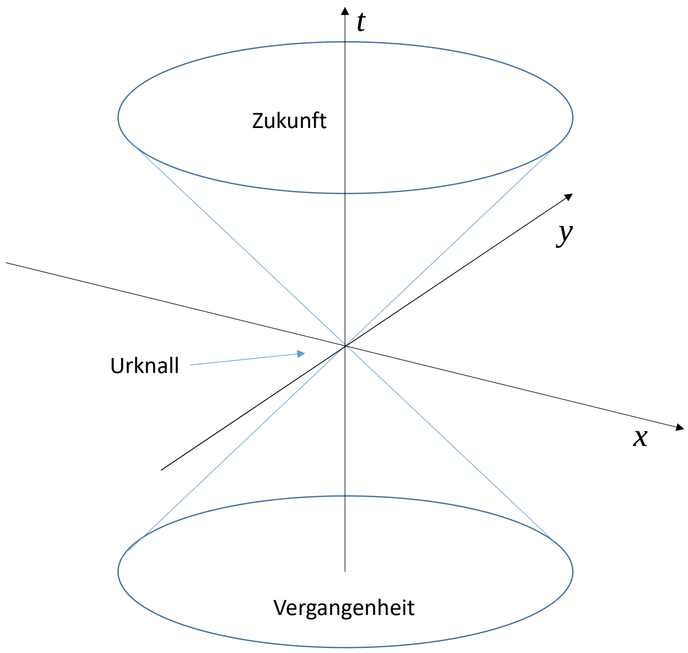

Abbildung 1. Lichtkegel im vierdimensionalen Minkowski-Raum

Meist wir jedoch übersehen, daß es für die Energie, also den reziproken Raum,[1] einen weiteren Lichtkegel

$$\frac{E^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2$$

gibt, der sich phasenverschoben zum ersten über der Impulsebene ausbreitet. Die Phasenverschiebung beträgt ein volles Weltalter.[2] Daher sieht der Energiekegel nicht wie ein Doppelkegel aus, sondern wie zwei aufeinandergesetzte und an der Grundfläche gespiegelte Einfachkegel (Abb. 2). Als Standort des Beobachters im Koordinatennullpunkt wurde die Singularität des Urknalls gewählt. Wenn also jeder beliebige Raumzeitpunkt im Universum eine Vergangenheit hat, warum sollte es ausgerechnet zum Zeitpunkt des Urknalls keine Vergangenheit geben? Die meisten Physiker gehen immer noch davon aus, daß ein linearer Anfang des Universums schon allein deswegen existieren muß, weil Gott sonst die Welt nicht geschaffen haben könnte (wenn

[1] Eigentlich die reziproke Zeit

[2] Die meisten Physiker glauben immer noch, daß die Zeit im Newtonschen Sinne linear sei, aber seit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist sie nichtlinear.

es bereits vorher etwas gegeben hat). Selbst Hawking glaubte, daß die Zeit beim Urknall entstanden ist. Seine Begründung, wie man Zeit aus dem Nichts erzeugen kann, ist allerdings nicht schlüssig, und er kann auch nicht erklären, warum sie gerade vor 13,8 Milliarden Jahren entstanden sein soll. Die Welt kann nicht aus Langeweile heraus erschaffen worden sein, sondern sie muß schon immer dagewesen sein. Nach dem Standardmodell läuft die Zeit immer weiter, das All breitet sich unendlich aus,[3] obwohl der Raum gekrümmt ist und die Raumzeit auch bei noch so großem Krümmungsradius irgendwann wieder in sich zurückkehren müßte. Der Glaube an die Linearität hat sich so sehr in unserem Kopf festgesetzt, daß alle, die das meinen, immer wieder die Frage stellen, was denn außerhalb des Universums sei. Sie glauben das immer noch, auch wenn sie schon hundertmal um die Welt geflogen sind. Sie können sich einfach nicht vorstellen, daß man nicht über den Rand einer Scheibe fällt, sondern tatsächlich am selben Ort, von dem man losgeflogen ist, wieder ankommt, wenn auch zu einer späteren Zeit. Einstein hat allerdings gezeigt,[4] daß auch die Zeit immer wieder anfängt, nur eben nicht heute und nicht morgen. Wäre allerdings die Erdoberfläche so ausgedehnt wie das All, wäre das ohne jeglichen Zweifel der Fall.

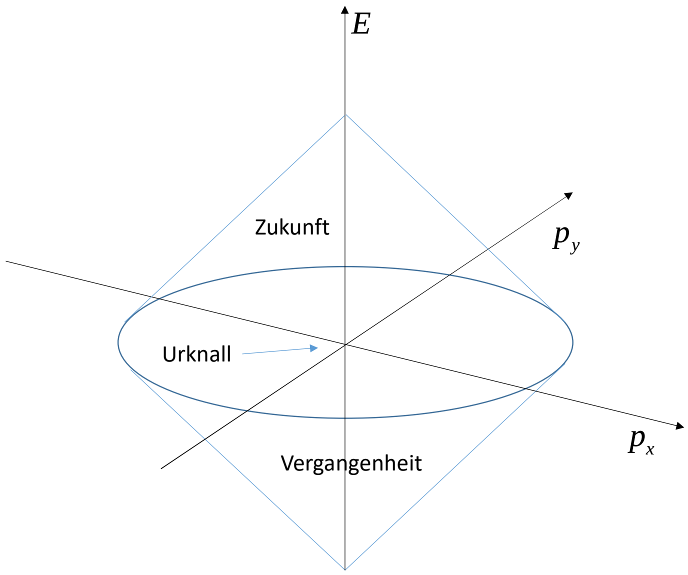

Abbildung 2. Reziproker Lichtkegel über dem vierdimensionalen Impulsraum

Unabhängig von jeglicher Philosophie ist unser infinitesimales Wegelement in drei Dimensionen gegeben durch

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 .$$

Während des Urknalls ist $ds = 0$ und, wie man leicht nachrechnet,

$$t = \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{bzw.} \quad c^2 t^2 = x^2 + y^2 .$$

Das ist die Gleichung eines Kegels. Sein totales Differential lautet

[3] Obwohl niemand bisher sagen konnte, wie groß „unendlich“ ist
[4] Auch wenn er es vielleicht selbst nicht wahrgenommen hat

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x}dx + \frac{\partial t}{\partial y}dy = \frac{1}{c}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{1}{c}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Daraus folgt

$$dt^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{x^2+y^2}\left(xdx+ydy\right)^2.$$

In ebenen Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

lauten die kartesischen Differentiale

$$dx = -r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi dr,$$
$$dy = r\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dr.$$

Multipliziert mit den kartesischen Koordinaten ergibt sich

$$xdx = -r^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + r\cos^2\varphi dr,$$
$$ydy = r^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + r\sin^2\varphi dr.$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, erhalten wir das radiale Differential:

$$xdx + ydy = -r^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + r\cos^2\varphi dr + r^2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi + r\sin^2\varphi dr = rdr,$$

woraus sich das quadratische infinitesimale Zeitelement und der Kegelschnitt in Polarkoordinaten ergeben:

$$dt^2 = \frac{1}{c^2}dr^2 \quad \text{bzw.} \quad c^2t^2 = r^2.$$

Ähnlich folgt aus $E = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ mit

$$dE = \frac{\partial E}{\partial p_x}dp_x + \frac{\partial E}{\partial p_y}dp_y = c\frac{p_x}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}}dp_c + c\frac{p_y}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}}dp_y$$

zunächst das quadratische infinitesimale Energieelement

$$dE^2 = c^2\frac{1}{p_x^2+p_y^2}\left(p_xdp_x + p_ydp_y\right)^2$$

und daraus die Kegelgleichung des reziproken Raums $E^2/c^2 = p^2$. In der Quantenmechanik bildet man üblicherweise die quadratischen Mittelwerte

$$c^2\left\langle t^2\right\rangle=\left\langle r^2\right\rangle,\quad \frac{1}{c^2}\left\langle E^2\right\rangle=\left\langle p^2\right\rangle.$$

Multiplizieren wir beide Gleichungen

$$\left\langle t^2\right\rangle\left\langle E^2\right\rangle=\left\langle r^2\right\rangle\left\langle p^2\right\rangle,$$

können wir mit Hilfe der quadratischen Mittelwerte

$$\left\langle r^2\right\rangle=\left\langle r\right\rangle^2+\Delta r^2,\quad \left\langle p^2\right\rangle=\left\langle p\right\rangle^2+\Delta p^2$$

umformen in

$$\left\langle r^2\right\rangle\left\langle p^2\right\rangle=\left(\left\langle r\right\rangle^2+\Delta r^2\right)\left(\left\langle p\right\rangle^2+\Delta p^2\right)=\left\langle r\right\rangle^2\left\langle p\right\rangle^2+\left\langle r\right\rangle^2\Delta p^2+\left\langle p\right\rangle^2\Delta r^2+\Delta r^2\Delta p^2.$$

Während des Urknalls muß das Produkt der quadratischen Mittelwerte gleich null sein, da andernfalls keine Energie in den verschränkten reziproken Raum übertragen werden kann, d.h.

$$\left\langle r^2\right\rangle\left\langle p^2\right\rangle=0$$

bzw.

$$\left\langle r\right\rangle^2\left\langle p\right\rangle^2+\left\langle r\right\rangle^2\Delta p^2+\left\langle p\right\rangle^2\Delta r^2+\Delta r^2\Delta p^2=0.$$

Genau dann sind nämlich die Mittelwerte gleich den tatsächlichen Werten in der Singularität, d.h.

$$r^2p^2+r^2\Delta p^2+p^2\Delta r^2+\Delta r^2\Delta p^2=0.$$

Wenn die Masse der Randsingularität maximal wird, gilt

$$r_{\min}^2p_{\max}^2+r_{\min}^2\Delta p_{\max}^2+p_{\max}^2\Delta r_{\min}^2+\Delta r_{\min}^2\Delta p_{\max}^2=0.$$

In der Punktsingularität können wir $r_{\min}=0$ setzen und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$p_{\max}^2\Delta r_{\min}^2+\Delta r_{\min}^2\Delta p_{\max}^2=0.$$

Die Impulsunschärfe des Alls kann nicht größer werden als der Impuls selbst, d.h.

$$\Delta r_{\min}=\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{\Delta p_{\max}}=\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{p_{\max}}.$$

Daraus folgt die Heisenbergsche Unschärferelation[5]

[5] Die Unschärferelation wurde von Heisenberg falsch angegeben, denn sie ist eine komplexe Größe.

$$\Delta r_{\min}^2 \Delta p_{\max}^2 = -p_{\max}^2 \Delta r_{\min}^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Wenn der Radius des Weltalls und damit der Punktsingularität kurz vor dem Urknall maximal geworden ist, gilt

$$r_{\max}^2 p_{\min}^2 + r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 + p_{\min}^2 \Delta r_{\max}^2 + \Delta r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 = 0.$$

In der Punktsingularität können wir $p_{\min} = 0$ setzen und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 + \Delta r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 = 0.$$

Die Ortsunschärfe des Alls kann nicht größer werden als der Raum selbst, d.h.

$$\Delta p_{\min} = \frac{i\hbar}{2} \frac{1}{\Delta r_{\max}} = \frac{i\hbar}{2} \frac{1}{r_{\max}}.$$

Daraus folgt die Heisenbergsche Unschärferelation in der Form

$$\Delta r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 = -r_{\max}^2 \Delta p_{\min}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$$

Die Kombinationen $\Delta r_{\max} \Delta p_{\max}$ und $\Delta r_{\min} \Delta p_{\min}$ sind aufgrund der Phasenverschiebung der beiden Lichtkegel während des Urknalls verboten.

