

# Physikaufgabe 143

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Schwarzschildradien von Punkt- und Randsingularität und leiten Sie daraus den Radius des sichtbaren Universums ab.

**Lösung:** Im Jahre 1973 fand Jacob Bekenstein heraus, daß sich die Entropie Schwarzer Löcher nach dem holographischen Prinzip auf der Oberfläche einer Singularität befindet [1]. Das läßt den Schluß zu, daß sich jegliche Masse eines Schwarzen Lochs auf seiner Oberfläche befindet.<sup>1</sup> Das Weltall ist nämlich ein sogenanntes Räuber-Beute-System:<sup>2</sup> eine der beiden Singularitäten ist stets der Räuber, die andere sowie die freie Masse des Alls sind seine Beute. Wenn die massereichere Singularität jegliche freie Masse des Alls verschlungen hat, geht sie selbst zugrunde – sie zerstrahlt.<sup>3</sup> Ein solches Räuber-Beute-System kann niemals enden, denn seine Masse bleibt erhalten, und damit dreht sich der Spieß um: die einstige Beute wird nun selbst zum Räuber. Die ehemalige Räubersingularität<sup>4</sup> kollabiert ja gerade aufgrund ihrer relativistisch endlichen Masse,<sup>5</sup> die nicht mehr weiter ansteigen kann. Das nunmehr sich ausdehnende und mit Masse füllende Universum, welches sich aus einer Punktsingularität heraus entwickelt, die ihren früheren Räuber, die zerplatzte Randsingularität, hat verhungern lassen, frißt sich nun selbst mit Masse immer mehr voll.

In lichtartigen Universen, speziell zum Zeitpunkt des Urknalls, wenn keine Vergangenheit existiert und keine Zukunft, verschwindet bekanntlich das infinitesimale Wegelement, womit der Weg zwischen Punkt und Rand gleich null ist. Mithin gilt

$$s^2 = c^2 t^2 - \mathbf{R}^2 = 0,$$

wobei  $R = ct$  der Radius und

$$t = (1/3)\Lambda^{-1}M^3$$

die Zeit ist,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\Lambda = 4 \cdot 10^{15} \text{ kg}^3/\text{s}$  eine Konstante. Es folgen die Radien von Punkt- und Randsingularität,

$$R_0 = \frac{c}{3\Lambda} M_0^3 = \frac{c}{3\Lambda} (M - M_\infty)^3 \quad \text{bzw.} \quad R_\infty = \frac{c}{3\Lambda} (M - M_0)^3 = \frac{c}{3\Lambda} M_\infty^3.$$

Damit lassen sich beide Radien auf den Schwarzschildradius des Universums

$$R_S = \frac{c}{3\Lambda} M^3$$

und die einzelnen Massen auf seine Gesamtmasse  $M$  normieren. Wir erhalten

$$\frac{R_0}{R_S} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^3 \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_\infty}{R_S} = \left(\frac{M_\infty}{M}\right)^3 = \left(1 - \frac{M_0}{M}\right)^3.$$

<sup>1</sup> Bislang unbewiesenes Postulat

<sup>2</sup> Dies kann nach dem Überlebensprinzip als Axiom für alle dynamischen Systeme gelten.

<sup>3</sup> Und zwar durch zeitliches Aufeinandertreffen mit Antimaterie

<sup>4</sup> Hier stellvertretend für Randsingularität

<sup>5</sup> Lapidar gesprochen gilt das Heisenbergsche Unschärfepprinzip auch für das Weltall (siehe Anhang).

## Physikaufgabe 143

Wir wählen nun die Masse  $M_0$  als unabhängige und die Radien  $R_0 \equiv y$  bzw.  $R_\infty \equiv z$  als abhängige Variable:

$$x \equiv \frac{M_0}{M}, \quad y \equiv \frac{R_0}{R_S}, \quad z \equiv \frac{R_\infty}{R_S}.$$

Das liefert die Gleichungen

$$y = x^3 \quad \text{und} \quad z = (1-x)^3.$$

Den relativen Radius  $u$  des Universums erhalten wir dann aus der Gleichung

$$y + u + z = 1.$$

d.h.

$$u = 1 - y - z = 1 - x^3 - (1-x)^3 = 3x(1-x)$$

bzw.

$$u \equiv \frac{R_u}{R_S} = 3 \frac{M_0}{M} \left( 1 - \frac{M_0}{M} \right).$$

Schließlich berechnen wir die entsprechenden Volumina der beiden Singularitäten und den Anteil des freien Raums in 5 Zeitschritten, jeweils zu Beginn und am Ende des Universums sowie zur Halbzeit und nach  $\frac{1}{4}$  des Weltalters vor Ende und nach Beginn des Universums. Betrachten wir dazu die drei Randkurven in Abb. 1, in welche der Massenerfall bereits eingerechnet ist.

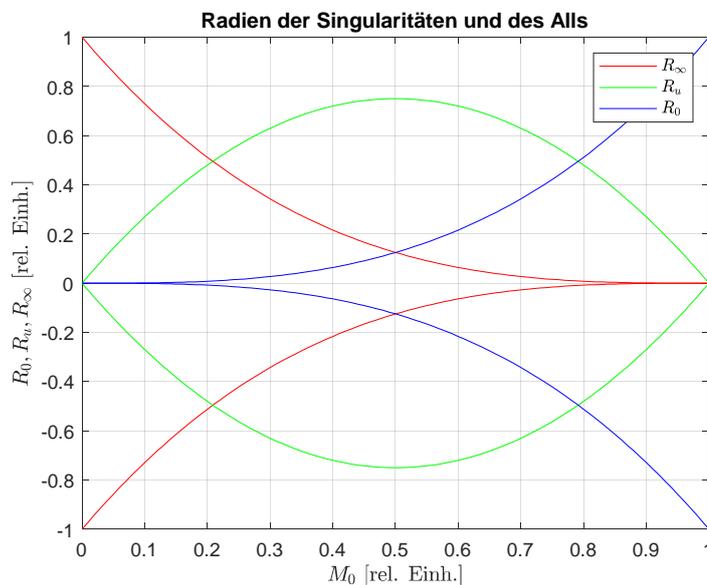


Abbildung 1. Größe der Radien von Randsingularität (rot), Punktsingularität (blau) und sichtbarem All (grün)

Wenn man das sichtbare Universum und die Randsingularität zusammennimmt, dehnt sich der Raum tatsächlich aus und die Entropie wird größer. Bei mehr als 80 % ihrer Masse nimmt die Punktsingularität eindeutig überhand und der Raum wird zunehmend verschluckt (Abb. 1).

## Physikaufgabe 143

---

Nach dem Urknall steckt die gesamte Masse in Form von dunkler Energie noch in der Randsingularität (rot). Eine Punktsingularität ist zwar bereits vorhanden, aber sie besitzt kurz nach dem Urknall noch keine äußere Energie. Der sichtbare Raum (grün) existiert noch nicht, er beginnt gerade erst, sich auszubreiten. Die Randsingularität ist nun zerfallen und gewinnt in Richtung Vergangenheit an Masse, der sichtbare Raum wird dadurch größer. Er stellt die Massendifferenz zwischen Randsingularität und Punktsingularität dar. In der Summe addieren sich alle drei Beiträge zur unveränderlichen Gesamtmasse und alle Radien zum Schwarzschildradius des Alls.<sup>6</sup> Das Licht breitet sich in Richtung der Punktsingularität aus, aber es kann nur soweit kommen, wie die Lichtgeschwindigkeit es zuläßt. Das sichtbare Universum wird allerdings niemals die volle Größe des gesamten Weltalls erreichen, weil es durch die Schwarzschildradien der Punkt- und der Randsingularität daran gehindert wird. Man erkennt ebenso, daß das sichtbare Universum wieder kleiner wird, nachdem es seinen Zenit überschritten hat; es verschwindet, sobald die Punktsingularität ihre volle Größe erreicht und die gesamte Masse an sich gezogen hat. Sie wird damit selbst zu einer Randsingularität und ihre Masse wird am Ende des Universums wieder in die Masse der Punktsingularität umgewandelt, welche aus der Vergangenheit stammt. Unmittelbar nach dem Zeitpunkt des Urknalls gibt es daher nur eine Punktsingularität mit der gesamten Masse des Alls, die sich dort aus der dunklen Energie der Randsingularität angesammelt hat. Das All, welches wir sehen, gibt es zu diesem Zeitpunkt noch nicht, und es erreicht auch nicht sprunghaft seine volle Größe, sondern erst allmählich, weil man die Punktsingularität anfangs noch vernachlässigen kann. Eine unendlich steil ansteigende Guth-Zeit, die schon zum neuen Universum gezählt werden müßte, gibt es daher nicht, weil der Schwarzschildradius des Universums eine Erhaltungsgröße ist. Der Zusammenprall der beiden Randsingularitäten aus Materie und Antimaterie vollzieht sich nicht in Zeitangaben, sondern beruht auf der Teleportierung verschränkter Quantenzustände. Die Randsingularität zerfällt in diesem Sinne also nicht, sie wandert lediglich als Punktsingularität in die Vergangenheit, um nach Erreichen ihrer vollen Größe beim nächsten Urknall wieder mit der dann voll ausgewachsenen Punktsingularität zusammenzutreffen.

Die Volumina der drei Beiträge des Alls zum Gesamtvolumen  $V_S$  sind demnach gegeben durch

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3, \quad V_u = \frac{4\pi}{3} R_u^3, \quad V_\infty = \frac{4\pi}{3} R_\infty^3, \quad V_S = \frac{4\pi}{3} R_S^3.$$

Wie wir gesehen haben, ist

$$R_0 + R_u + R_\infty = R_S$$

oder in relativen Einheiten

$$\frac{R_0}{R_S} + \frac{R_u}{R_S} + \frac{R_\infty}{R_S} = 1.$$

Setzen wir die kubischen Abhängigkeiten der Radien von den Massen ein, folgt

$$\left(\frac{M_0}{M}\right)^3 + \frac{R_u}{R_S} + \left(\frac{M_\infty}{M}\right)^3 = 1.$$

---

<sup>6</sup> Wie es die Steady-State-Theorie Albert Einsteins besagte

## Physikaufgabe 143

---

Da die Masse während des Urknalls erhalten bleibt, setzen wir  $M_\infty = M - M_0$ , d.h.

$$\left(\frac{M_0}{M}\right)^3 + \frac{R_u}{R_s} + \left(1 - \frac{M_0}{M}\right)^3 = 1,$$

woraus sich der Radius des sich aufspannenden Vakuums gemäß

$$\frac{R_u}{R_s} = 1 - \left[ \left(\frac{M_0}{M}\right)^3 + \left(1 - \frac{M_0}{M}\right)^3 \right] = 3 \frac{M_0}{M} \left(1 - \frac{M_0}{M}\right)$$

berechnen läßt. Damit erhalten wir eine symmetrische Verteilung der Volumina im Raum,

$$\left(\frac{M_0}{M}\right)^3 + 3 \frac{M_0}{M} \frac{M_\infty}{M} + \left(\frac{M_\infty}{M}\right)^3 = 1.$$

Parametrisieren wir

$$\frac{M_0}{M} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{M_\infty}{M} = 1 - \gamma,$$

können wir mit Hilfe des binomischen Satzes leicht nachrechnen, daß

$$\gamma^3 + 3\gamma(1-\gamma) + (1-\gamma)^3 = 1$$

bzw. nach Multiplikation mit  $R_s$

$$\gamma^3 R_s + 3\gamma(1-\gamma)R_s + (1-\gamma)^3 R_s = R_s.$$

Durch Vergleich mit  $R_0 + R_u + R_\infty = R_s$  folgt

$$R_0 = \gamma^3 R_s, \quad R_u = 3\gamma(1-\gamma)R_s, \quad R_\infty = (1-\gamma)^3 R_s.$$

In Tab. 1 sind die relativen Radien der Singularitäten und des Alls angegeben:

$\gamma$	$1-\gamma$	$R_0/R_s$	$R_u/R_s$	$R_\infty/R_s$	Summe
0	1	0	0	1	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{27}{64}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{64}$	1
1	0	1	0	0	1

*Tabelle 1. Relative Radien der Punkt- und Randsingularität und des sichtbaren Alls*

Damit gelingt auch die Parametrisierung der Volumina,

## Physikaufgabe 143

$$\frac{4\pi}{3} \left( \gamma^3 + 3\gamma(1-\gamma) + (1-\gamma)^3 \right)^3 R_S^3 = \frac{4\pi}{3} R_S^3.$$

Ausmultipliziert können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \left( \gamma^3 + 3\gamma(1-\gamma) + (1-\gamma)^3 \right)^3 &= \left( \gamma^3 + (1-\gamma)^3 \right)^3 + 9 \left( \gamma^3 + (1-\gamma)^3 \right) \gamma(1-\gamma) + 27\gamma^3(1-\gamma)^3 \\ &= \gamma^9 + 3\gamma^6(1-\gamma)^3 + 9\gamma^4(1-\gamma) + 27\gamma^3(1-\gamma)^3 + 9\gamma(1-\gamma)^4 + 3\gamma^3(1-\gamma)^6 + (1-\gamma)^9. \end{aligned}$$

Aus Normierungsgründen darf das Volumen der Punktsingularität keinen Term mit  $(1-\gamma)$  enthalten und das Volumen der Randsingularität keinen Term mit  $\gamma$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} V_0 &= \gamma^9 V_S, \\ V_u &= 3 \left\{ \gamma^5(1-\gamma)^2 + 3\gamma^3 + 9\gamma^2(1-\gamma)^2 + 3(1-\gamma)^3 + \gamma^2(1-\gamma)^5 \right\} \gamma(1-\gamma) V_S, \\ V_\infty &= (1-\gamma)^9 V_S \end{aligned}$$

und nach Multiplikation mit der Dichte schließlich die Masse

$$\begin{aligned} M &= \gamma^9 M + 3 \left\{ \gamma^5(1-\gamma)^2 + 3\gamma^3 + 9\gamma^2(1-\gamma)^2 + 3(1-\gamma)^3 + \gamma^2(1-\gamma)^5 \right\} \\ &\quad \times \gamma(1-\gamma) M + (1-\gamma)^9 M, \end{aligned}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} M_0 &= \gamma^9 M, \\ M_u &= 3 \left\{ \gamma^5(1-\gamma)^2 + 3\gamma^3 + 9\gamma^2(1-\gamma)^2 + 3(1-\gamma)^3 + \gamma^2(1-\gamma)^5 \right\} \gamma(1-\gamma) M, \\ M_\infty &= (1-\gamma)^9 M. \end{aligned}$$

In Tab. 2 sind die relativen Massen der Singularitäten und des Alls für bestimmte Parameterwerte angegeben:

$\gamma$	$\gamma^9$	$M_0/M$	$M_u/M$	$M_\infty/M$	$M$
0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{4}$	1	1	242460	19683	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{242460}{256}$	$\frac{19683}{256}$	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{242460}{64}$	$\frac{19683}{64}$	1
1	1	1	0	0	1

Tabelle 2. Relative Massen von Punkt- und Randsingularität und des sichtbaren Alls

Nicht das Vakuum spannt also den Raum auf, sondern es ist die Masse, die das Vakuum erst erzeugt. Das steht im völligen Widerspruch zum gängigen Weltbild der Physik. Nach unserer

---

## Physikaufgabe 143

---

Theorie sind es die Massen, die in den Singularitäten an den Rändern des Universums stecken, die ein Loch ins Weltall reißen.

Aus dem Verhältnis der Radien folgt das Verhältnis der Volumina, zunächst für die Punktsingularität:

$$\frac{R_0^3}{R_S^3} = \left( \frac{M_0}{M} \right)^9.$$

Bilden wir die Ableitung nach deren relativer Masse, erhalten wir ein integrierbares Differential:

$$d \frac{M_0}{M} = d \frac{R_0^3}{R_S^3} = 9 \left( \frac{M_0}{M} \right)^8 d \frac{M_0}{M}.$$

Das Integral liefert somit den Massenzuwachs der Punktsingularität als geschlossenen Ausdruck:

$$\frac{M_0}{M} = \int_0^x d \frac{M_0}{M} = 9 \int_0^x \left( \frac{M_0}{M} \right)^8 d \frac{M_0}{M} = 9 \int_0^x \xi^8 d\xi = \left[ \xi^9 \right]_0^x = x^9.$$

Ähnlich verfahren wir mit der Randsingularität. Deren relatives Volumenverhältnis lautet:

$$\frac{R_\infty^3}{R_S^3} = \left( 1 - \frac{M_0}{M} \right)^9.$$

Die Ableitung ergibt

$$d \frac{M_\infty}{M} = d \frac{R_\infty^3}{R_S^3} = -9 \left( 1 - \frac{M_0}{M} \right)^8 d \frac{M_0}{M},$$

und die Integration liefert

$$\frac{M_\infty}{M} = \int_1^x d \frac{M_\infty}{M} = -9 \int_1^x \left( 1 - \frac{M_0}{M} \right)^8 d \frac{M_0}{M} = 9 \int_0^{1-x} \xi^8 d\xi = \left[ \xi^9 \right]_0^{1-x} = (1-x)^9.$$

Für das Universum gilt schließlich

$$\frac{M_u}{M} = 1 - \left( \frac{M_0}{M} + \frac{M_\infty}{M} \right) = 1 - \left[ x^9 + (1-x)^9 \right].$$

Für die hälftige Masse mit  $x = 1/2$  ergibt sich

$$\frac{M_u}{M} = 1 - \left[ x^9 + (1-x)^9 \right] = \frac{510}{512} = \frac{261120}{262144}.$$

Zum Beweis, daß die Masse des Alls wieder abnimmt, differenzieren wir die Funktion

$$f \equiv \frac{M_u}{M} = 1 - \left( \frac{M_0}{M} + \frac{M_\infty}{M} \right)$$

## Physikaufgabe 143

bzw.

$$f(x) = 1 - x^9 - (1-x)^9$$

zweimal nach  $x$ . Die beiden Ableitungen lauten

$$f'(x) = -9x^8 + 9(1-x)^8,$$

$$f''(x) = -72x^7 - 72(1-x)^7 < 0.$$

Diese Funktion besitzt einen Extremwert an der Stelle  $x = 1/2$  und an dieser Stelle eine negative Krümmung, d.h. ein relatives Maximum. Die Masse des sichtbaren Universums nimmt also tatsächlich bis zur Hälfte seiner Gesamtmasse zu und von dort an wieder ab. Das ist aber auch ganz klar, weil die Masse der Punktsingularität bis zur Gesamtmasse zunimmt, während die Randsingularität verschwindet. Die Massen von Punktsingularität und sichtbarer Masse nehmen insgesamt zu, was wir bereits in Aufgabe [133] gezeigt haben.

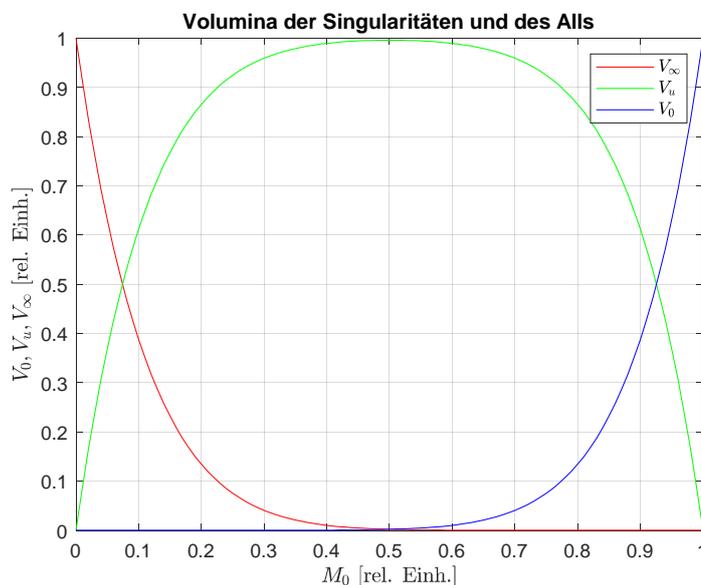


Abbildung 2. Evolution der Massen von Punkt- und Randsingularität und des sichtbaren Alls

Derzeit mag sich das sichtbare All noch in seiner Ausdehnungsphase befinden, aber dieser Prozeß wird irgendwann stagnieren und sich anschließend umkehren. Danach wird alle Masse in die Punktsingularität des Universums hineingezogen.

### Literatur

- [1] Jacob D. Bekenstein: *Black holes and entropy*. In: *Phys.Rev. D*, Nr. 7, 1973, S. 2333–2346.
- [2] Alan Guth, *Die Geburt des Kosmos aus dem Nichts. Die Theorie des inflationären Universums*. Aus dem Amerikanischen von Gerhard Ingold und Martina Sonntag. Droemer, München 1999.
- [3] Stephen Hawking: *A Brief History of Time. From the Big Bang to Black Holes*. Transworld Pub Ltd UK. 2001.

## Anhang

Die Impulsunschärfe des Alls kann nicht größer werden als der Impuls selbst, d.h.

$$\Delta p_{\max} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta r_{\min}} = Mc.$$

Das ist äquivalent zu

$$\Delta r_{\min} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta p_{\max}} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{Mc}.$$

Ferner gilt, daß die Ortsunschärfe des Alls nicht größer werden kann als sein Radius, i.e.

$$\Delta r_{\max} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta p_{\min}} = c\tau_s,$$

wobei  $\tau_s$  die Zeit auf dem Schwarzschildradius ist, das sogenannte Weltalter. Diese Gleichung ist äquivalent mit

$$\Delta p_{\min} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta r_{\max}} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{c\tau_s}.$$

Die Kombinationen

$$\Delta r_{\max} \Delta p_{\max} = \tau_s c M c = \tau_s E$$

bzw.

$$\Delta r_{\min} \Delta p_{\min} = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{c\tau_s M c} = \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{\tau_s E}$$

sind verboten, weil Raum und Energie nicht zugleich ihren Maximal- oder Minimalwert annehmen können. Daher kollabiert der Raum zu einer Punktsingularität, wenn die Randsingularität ihr energetisches Maximum erreicht hat. Umgekehrt wird der Raum voll aufgespannt,<sup>7</sup> wenn zu Beginn des Universums die in ihm enthaltene Energie gleich null ist. Der zugrundeliegende Mechanismus basiert auf verschränkten quantenmechanischen Zuständen zwischen Rand- und Punktsingularität. Die Heisenbergsche Unschärferelation ist nämlich nichts anderes als der Flächensatz, und das Plancksche Wirkungsquantum ist ein Drehimpuls. Die Kantenlängen einer Fläche sind allerdings kein geeignetes Maß für die gleichzeitige Bestimmung von Ort und Impuls.<sup>8</sup> Somit wird die Laplacesche Dämon durch die Heisenbergsche Unschärferelation jedenfalls nicht widerlegt.<sup>9</sup> Wenn also Stephen Hawking in seinem Buch „Eine kurze Geschichte der

---

<sup>7</sup> Und das auch ganz ohne Inflaton

<sup>8</sup> Auch die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegung auf elliptischen Bahnen besagen, daß aufgrund der Drehimpulserhaltung der größte Impuls dort erreicht wird, wo der Abstand zum Brennpunkt der Ellipse am kleinsten ist, und umgekehrt.

<sup>9</sup> *Pierre-Simon Laplace*, „Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen,

## Physikaufgabe 143

---

Zeit“ [3] behauptet, daß Allgemeine Relativitätstheorie und Quantentheorie im Universum nicht in Einklang zu bringen seien, dann irrt er jedenfalls.

```
% Aufgabe 134
clear all

a = 0;
n = 100;
for i = 1:n+1
    x(i) = (i-1)/n;
    yp(i) = (1-x(i))^3;
    ym(i) = -yp(i);
    up(i) = 3*x(i)*(1-x(i));
    um(i) = -up(i);
    zp(i) = x(i)^3;
    zm(i) = -x(i)^3;
    s(i) = yp(i) + zp(i) + up(i) + ym(i) + zm(i) + um(i);
    Iy(i) = (1-x(i))^9;
    Iz(i) = x(i)^9;
    Iu(i) = 1-Iy(i)-Iz(i);
    I(i) = Iy(i) + Iz(i) + Iu(i);
end

figure(1)
plot(x,yp,'-r')
hold on
plot(x,up,'-g')
hold on
plot(x,zp,'-b')
hold on
plot(x,ym,'-r')
hold on
plot(x,um,'-g')
hold on
plot(x,zm,'-b')
legend('$R_{\infty}$','$R_u$','$R_0$','interpreter','latex')
grid on
title('Radien der Singularitäten und des Alls','interpreter','latex')
xlabel('$M_0$ [rel. Einh.]','interpreter','latex')
ylabel('$R_0, R_u, R_{\infty}$ [rel. Einh.]','interpreter','latex')

figure(2)
plot(x,Iy,'-r')
hold on
plot(x,Iu,'-g')
hold on
plot(x,Iz,'-b')
legend('$V_{\infty}$','$V_u$','$V_0$','interpreter','latex')
grid on
title('Volumina der Singularitäten und des Alls')
xlabel('$M_0$ [rel. Einh.]','interpreter','latex')
ylabel('$V_0, V_u, V_{\infty}$ [rel. Einh.]','interpreter','latex')
```

---

würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiß, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.“ In: *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814.

---