Aufgabe: Berechnen Sie die kinetische Energie des Universums unter der Annahme, daß dieses ein Schwarzen Loch darstellt.

Lösung: Im voll expandierten Zustand besitzt das Weltall seine maximale kinetische Energie, da diese in den Aufbau der Schwarzschildsphäre gesteckt wird. Sowohl seine Translations- als auch seine Rotationsenergie sind null. Die Expansion der Randsingularität hat die Drehung der Punktsingularität hingegen voll zum Erliegen gebracht. In letzterer ist für Bewegung kein Trägheitsmoment mehr vorhanden. Die kinetische Energie einer Kugelsphäre ist die Summe aus translatorischer Energie und Rotationsenergie. Letztere berechnet sich allgemein nach der Formel

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2,$$

wobei ω die Rotationskreisfrequenz um die *z*-Achse darstellt und das Trägheitsmoment einer Sphäre sich als Grenzwert der Differenz der Trägheitsmomente zweier Vollkugeln mit den Radien R_S und $R_S + \Delta R$ für $\Delta R \to 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3} \lim_{\Delta R \to 0} \rho\left(\left(R_S + \Delta R\right)^5 - R_S^5\right) = \frac{2}{5} M \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\left(R_S + \Delta R\right)^5 - R_S^5}{\left(R_S + \Delta R\right)^3 - R_S^3} \\ &= \frac{2}{5} M \lim_{\Delta R \to 0} \frac{\left(R_S + \Delta R\right)^4 + \left(R_S + \Delta R\right)^3 R_S + \left(R_S + \Delta R\right)^2 R_S^2 + \left(R_S + \Delta R\right) R_S^3 + R_S^4}{\left(R_S + \Delta R\right)^2 + \left(R_S + \Delta R\right) R_S + R_S^2} \\ &= \frac{2}{5} M \frac{5R_S^4}{3R_S^2} = \frac{2}{3} M R_S^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Division durch Null vermieden, indem wir auf Zähler und Nenner die binomischen Formeln angewandt haben. Substituieren wir noch die Winkelgeschwindigkeit der Rotation auf dem Schwarzschildradius durch die Kreisfrequenz $\omega = c/R_S$, erhalten wir die Rotationsenergie eines Schwarzen Lochs, welche ein Drittel der Gesamtenergie beträgt,

$$E_{rot} = \frac{1}{3} M R_S^2 \omega^2 = \frac{1}{3} M c^2.$$

Umgekehrt ist das Trägheitsmoment einer Punktsingularität auf dem Rand des Schwarzschildradius wegen ihrer verschwindenden Masse gleich null, und sie hat ebenfalls keine Rotationsenergie.

Die radial nach außen gerichtete Zentrifugalkraft steht mit dem translatorischen Anteil der kinetischen Energie im Gleichgewicht und ist in Vektornotation gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z &= -M\boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) = -M\omega\mathbf{e}_z \times \left(\omega\rho\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho + \omega z\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z\right) = M\omega^2 r \sin\theta\mathbf{e}_\rho \\ &= M\omega^2 r \sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\mathbf{e}_r - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_z\right) = M\omega^2 r\mathbf{e}_r - M\omega^2 r\cos\theta\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Dabei haben wir als Koordinatensystem Zylinderkoordinaten ρ, φ und *z* gewählt, wobei *r* und θ Kugelkoordinaten sind. Da der Ortvektor die Polarkoordinatendarstellung

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

besitzt, können wir die Zentrifugalkraft mittels der Relation $\rho = r\sin\theta$ und $z = r\cos\theta$ auch wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{F}_z = M\omega^2 r\sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\mathbf{e}_r - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\mathbf{e}_z\right) = M\omega^2 r\mathbf{e}_r - M\omega^2 r\cos\theta\mathbf{e}_z.$$

Bilden wir von diesem Ausdruck das Differential, ergibt sich mittels $dM = \sigma R_S^2\sin\theta d\theta d\varphi$ die Umformung

$$d\mathbf{F}_z = \omega^2 R_S\left(\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_z\right)dM = \left(\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_z\right)\sigma\omega^2 R_S^3\sin\theta d\theta d\varphi$$

Mit $\mathbf{r} = R_S\mathbf{e}_r$ folgt das Differential der translatorischen kinetischen Energie

$$\begin{aligned} dE_{trans} &= \mathbf{r}d\mathbf{F}_z = \left(\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r - \cos\theta\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z\right)\sigma\omega^2 R_S^4\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \left(1-\cos^2\theta\right)\sigma\omega^2 R_S^4\sin\theta d\theta d\varphi = \sigma c^2 R_S^2\sin^3\theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

woraus sich mit Hilfe des Integrals

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \left[-\cos\theta\right]_0^\pi + \frac{1}{3}\left[\cos^3\theta\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

die kinetische Translationsenergie ergibt,

$$E_{trans} = \int dE_{trans} = \sigma c^2 R_S^2\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}Mc^2$$

Insgesamt beträgt die kinetische Energie eines Schwarzen Lochs

$$E_{kin} = E_{trans} + E_{rot} = \frac{2}{3}Mc^2 + \frac{1}{3}Mc^2 = Mc^2.$$

Es stimmt also nicht ganz, daß wir nicht wüßten, was in einem Schwarzen Loch passiert.