

## Physikaufgabe 139

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Wärmeenergie des Alls unter der Annahme, daß dieses ein Schwarzes Loch darstellt, und zeigen Sie, daß die Wärmeenergie nicht von der Masse abhängt. Leiten Sie auch den bekannten Zusammenhang zwischen Schwarzschildradius und Masse her.

**Lösung:** Durch Multiplikation der Hawking-Temperatur

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}$$

mit der Bekenstein- Entropie

$$S = \frac{kc^3 A}{4\hbar G} = \frac{kc^3 \pi R_s^2}{\hbar G} = \frac{4\pi GM^2 k}{\hbar c}$$

ergibt sich eine scheinbare Massenabhängigkeit der Wärmeenergie des Alls,

$$Q = TS = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk} \frac{4\pi GM^2 k}{\hbar c} = \frac{1}{2} Mc^2,$$

wobei  $M = \sigma A$  die Masse eines Schwarzen Lochs bei konstanter Flächendichte  $\sigma$  und variabler Oberfläche  $A$  ist,  $G$  die Gravitations- und  $k$  die Boltzmann-Konstante,  $\hbar$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

Die Entropie ist proportional zur Masse, wenn man die Oberfläche durch die Masse ausdrückt:

$$S = \frac{kc^3 A}{4\hbar G} = \frac{kc^3 M}{4\hbar G\sigma}.$$

Damit wird die Wärme aber von der Masse unabhängig, denn

$$Q = TS = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk} \frac{kc^3 M}{4\hbar G\sigma} = \frac{c^6}{32\pi\sigma G^2}.$$

Daraus folgt, daß die Wärmeenergie eines Schwarzen Lochs eine Erhaltungsgröße ist, sofern dieses nicht Masse durch Strahlung verliert. Damit haben wir gezeigt, daß auch eine Punktsingularität verschwindender Masse durchaus Wärmeenergie in der Größenordnung des ausgedehnten Alls besitzen kann.

Durch Gleichsetzen beider Formeln für  $Q$  läßt sich die Masse des Universums bestimmen, sofern man die Dichte kennt:

$$Q = \frac{c^6}{32\pi\sigma G^2} = \frac{1}{2} Mc^2.$$

Daraus folgt

$$M = \frac{c^4}{16\pi\sigma G^2} = \frac{3c^4}{16\pi\rho R_s G^2} = \frac{3c^4 R_s^2}{16\pi\rho R_s^3 G^2} = \frac{c^4 R_s^2}{4MG^2}.$$

Formen wir um und ziehen anschließend die Wurzel, erhalten wir den gewünschten Ausdruck

## Physikaufgabe 139

---

$$R_s^2 = \frac{4G^2 M^2}{c^4} \quad \text{bzw.} \quad R_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Somit gilt strenge Proportionalität zwischen Schwarzschildradius und Masse. Man könnte nun meinen, daß die Wärme stets null sein müsse, weil bei einer Randsingularität die Temperatur und bei einer Punktsingularität die Entropie immer null ist. Das ist aber, wie wir gezeigt haben, beim Universum nicht der Fall, wenn dieses ein Schwarzes Loch endlicher Ausdehnung darstellt. Denn wohin sollte die Wärme auch entkommen, wenn der Schwarzschildradius alles festhält und es kein Außen gibt?