Aufgabe: Berechnen Sie den Gravitationsdruck des Universums unter der Annahme, daß das All ein Schwarzes Loch ist.

Lösung: Der Gravitationsdruck gehört zur inneren Energie einer Punktsingularität und kompensiert exakt deren Wärmeenergie. Damit ist auch ihre innere Energie gleich null. Eine Punktsingularität besitzt ebenfalls keine äußere mechanische Energie, weder potentielle noch kinetische,[1] weil sie noch keine Geschwindigkeit aufgenommen hat und keine Masse besitzt und damit auch keine Gesamtenergie. Der Gravitationsdruck kann Arbeit verrichten und äußerst sich insofern als dunkle masselose Energieform. Gäbe es ihn nicht, hätte das Weltall zu Beginn keine Kraft zu seiner Ausdehnung. Üblicherweise berechnet man den Gravitationsdruck eines gasförmigen Himmelskörpers konstanter Dichte ρ in der Astrophysik gemäß dem aus der Kontinuumsmechanik bekannten hydrostatischen Druck

$$p(h) = \rho \int_0^h g(R-r)\,dr,$$

wobei $g(r)$ die ortabhängige Gravitationsbeschleunigung ist, R der Radius des Himmelskörpers und $h = R - r$ die entsprechende „Wassertiefe."[2] Für einen gleichmäßig ausgefüllten Körper mit radiusabhängiger Masse gilt

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r^3}{3r^2} = \frac{4\pi G\rho r}{3} = \frac{GMr}{R^3}.$$

An der Oberfläche $h = 0$ ist natürlich kein hydrostatischer Druck vorhanden. Insgesamt ergibt sich ein höhenabhängiger Gravitationsdruck

$$p(h) = \frac{GM}{R^3}\rho\int_0^h (R-r)\,dr = \frac{GM}{R^2}\rho\int_0^h dr - \frac{GM}{R^3}\rho\int_0^h r\,dr = \frac{GM}{R^2}\rho h - \frac{GM}{R^3}\rho\frac{h^2}{2}.$$

Im Mittelpunkt des Himmelskörpers gilt $r = 0$ bzw. $h = R.$ Daraus folgt

$$p(R) = \frac{GM}{R}\rho - \frac{1}{2}\frac{GM}{R}\rho = \frac{1}{2}\frac{GM}{R}\rho = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} = \frac{2\pi G}{3}\rho^2 R^2.$$

Bei einem Schwarzen Loch, dessen Masse voll auf der Oberfläche konzentriert ist,[3] liegen die Verhältnisse indes anders. Hier verschwindet die Ortsabhängigkeit der Gravitation wegen

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{4\pi G\sigma r^2}{r^2} = 4\pi G\sigma = \frac{4\pi GM}{4\pi R_S^2} = \frac{GM}{R_S^2},$$

wobei R_S der Schwarzschildradius ist. Multipliziert mit der Flächendichte ergibt sich ein Gravitationsdruck von

[1] Wegen des Virialsatzes
[2] Bekanntlich wird der hydrostatische Druck aus dem Gewicht der über der Tiefe *h* lastenden Masse bestimmt.
[3] Und die damit eine Randsingularität darstellt

$$p = \sigma g = \sigma \frac{GM}{R_S^2} = \frac{GM^2}{4\pi R_S^4} = 4\pi G\sigma^2$$

und eine Gravitationskraft $F_G = pA_S$, wobei $A_S = 4\pi R_S^2$ die Oberfläche der Singularität ist. Die Expansionsarbeit gegen die Gravitationskraft ergibt sich dann durch Integration aus dem Differential $dW = -R_S dF_G$, wobei $dF_G = pdA_S$. Mit $dA_S = R_S^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ folgt

$$dW = -pR_S^3 \sin\theta d\theta d\varphi$$

und nach Integration

$$W = -pR_S^3 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi pR_S^3 = -\frac{\left(4\pi\sigma R_S^2\right)^2 G}{R_S} = -\frac{GM^2}{R_S},$$

wobei wir die Integrationskonstante gleich null gesetzt haben. Mittels der Relation

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

erhalten wir schließlich die halbe kinetische Energie des Alls,

$$W = -\frac{1}{2} M \frac{2GM}{R_S} = -\frac{1}{2} Mc^2,$$

die als dunkle Energie negativ ist und daher zu fehlen scheint. Aber das ist ein Irrtum, weil das Universum aus zwei Singularitäten besteht, einer Rand- und einer Punktsingularität, die gegenseitig Masse austauschen und zwischen denen sich, außer zum Zeitpunkt des Urknalls, der Raum ausdehnt. Die fehlende Energie wird somit durch die masseunabhängige Wärmeenergie der Punktsingularität kompensiert.

