Aufgabe: Berechnen Sie die Drehimpulse des Weltalls unter der Annahme, daß das Universum ein Schwarzes Loch ist. Zeigen Sie, daß ein einzelnes Plancksches Wirkungsquantum auf der Randsingularität einen Urknall auslösen kann.

Lösung: Sei

$$L = L_0 + L_u + L_\infty = R_0 M_0 c + R_u M_u c + R_\infty M_\infty c = R_S M c$$

der Gesamtdrehimpuls des Universums, der sich zusammensetzt aus den Drehimpulsen der Punktsingularität L_0, der Randsingularität L_∞ und des Raums L_u. Neben der Drehimpulserhaltung gilt auch der Energieerhaltungssatz

$$E = M_0 c^2 + M_u c^2 + M_\infty c^2 = Mc^2$$

bzw. der Massenerhaltungssatz mit den entsprechenden Massen:

$$M_0 + M_u + M_\infty = M.$$

Unter der Annahme gleicher Dichten addieren sich auch die Volumina

$$V_0 + V_u + V_\infty = V_S$$

und die dritten Potenzen der Radien

$$R_0^3 + R_u^3 + R_\infty^3 = R_S^3.$$

Normiert können wir schreiben

$$\frac{M_0}{M} + \frac{M_u}{M} + \frac{M_\infty}{M} = \frac{R_0^3}{R_S^3} + \frac{R_u^3}{R_S^3} + \frac{R_\infty^3}{R_S^3} = 1.$$

Da Punkt- und Randsingularität sich gegenseitig ausschließen, wählen wir die Parametrisierung der beiden Singularitäten wie folgt:

$$\frac{R_0}{R_S} = \gamma, \qquad \frac{M_0}{M} = \frac{R_0^3}{R_S^3} = \gamma^3,$$

$$\frac{R_\infty}{R_S} = 1-\gamma, \quad \frac{M_\infty}{M} = \frac{R_\infty^3}{R_S^3} = (1-\gamma)^3,$$

Damit erhalten wir folgenden Ausdruck,

$$L = \gamma^4 R_S M c + R_u M_u c + (1-\gamma)^4 R_S M c = R_S M c,$$

aus dem wir durch Umformung den mittleren Term bestimmen können:

$$R_u M_u c = \left(1 - \gamma^4 - (1-\gamma)^4\right) R_S M c$$

Aus der binomischen Formel

$$(1-\gamma)^4 = 1-4\gamma+6\gamma^2-4\gamma^3+\gamma^4$$

ergibt sich

$$\gamma^4+4\gamma(1-\gamma)\left(1-\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\right)+(1-\gamma)^4=1$$

und damit die Lösung

$$L=\gamma^4 R_S Mc+4\gamma(1-\gamma)\left\{1-\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\right\}R_S Mc+(1-\gamma)^4 R_S Mc=R_S Mc,$$

mit den Beiträgen

$$L_0=\gamma^4,$$
$$L_u=4\gamma(1-\gamma)\left\{1-\frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)\right\}R_S Mc,$$
$$L_\infty=(1-\gamma)^4 R_S Mc.$$

In Tabelle 1 sind einige ausgesuchte Werte aufgeführt. Der Drehimpuls der Punktsingularität nimmt zu, jener der Randsingularität nimmt ab, und der Drehimpuls des leeren Raums hat ein lokales Maximum bei der Halbzeit des Alls.

γ	$L_0/R_S Mc$	$L_u/R_S Mc$	$L_\infty/R_S Mc$	$L/R_S Mc$
0	0	0	1	1
$1/4$	$\frac{1}{256}$	$\frac{87}{128}$	$\frac{81}{256}$	1
$1/2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	1
$3/4$	$\frac{81}{256}$	$\frac{87}{128_S}$	$\frac{1}{256}$	1
1	1	0	0	1

Tabelle 1. Einige ausgesuchte Werte für die Drehimpulse von Punkt- und Randsingularität sowie für den Raum

Sei nun $L=rmc$ der infinitesimale Drehimpuls einer Punktsingularität auf dem Ereignishorizont der Randsingularität des Universums, wobei r und m den momentanen Schwarzschildradius und die momentane Masse angeben.[1] Eine minimale Änderung des Drehimpulses erhalten wir aus dem Differential $\Delta L = mc\Delta r + r\Delta mc = \hbar.$ Das zweite Differential lautet dann

$$\Delta^2 L = c\Delta r\Delta m + c\left(m\Delta^2 r + cr\Delta^2 m\right) + c\Delta r\Delta m = c\left[m\Delta^2 r + 2\Delta r\Delta m + r\Delta^2 m\right]$$
$$= rmc\left[\frac{\Delta^2 r}{r}+2\frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta^2 m}{m}\right] = L\left[\Delta\frac{\Delta r}{r}+2\frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta m}{m}+\Delta\frac{\Delta m}{m}\right]=0,$$

und es muß verschwinden. Wegen

[1] Wir sind also noch nicht beim maximalen Schwarzschildradius angekommen.

$$\Delta\frac{\Delta L}{L}=\Delta\frac{\Delta r}{r}+\Delta\frac{\Delta m}{m}=\hbar\Delta\frac{1}{L}=0$$

ist

$$\Delta^2 L=L\left[2\frac{\Delta r}{r}\frac{\Delta m}{m}+\hbar\Delta\frac{1}{L}\right]=L\left[2\frac{\Delta r}{r}\frac{c\Delta m}{cm}-\frac{1}{L^2}\hbar\Delta L\right]=0,$$

und das ist nur möglich, wenn

$$2\Delta r\Delta mc-\hbar\frac{\Delta L}{L}=0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta r\Delta mc=\frac{\hbar}{2}\frac{\Delta L}{L}\geq\frac{\hbar}{2}.$$

Das sich der Drehimpuls der Randsingularität um nicht mehr als L ändern kann, gilt auf dem Rand des Universums das Gleichheitszeichen:

$$\Delta r\Delta mc=\frac{\hbar}{2}\frac{\Delta L}{L}.$$

Wenn die Randsingularität zu einer Punktsingularität wechselt, ändert sich der gesamte Drehimpuls auf Null. Daher ist $\Delta L=L$ und aus der Heisenbergschen Unschärferelation erhalten wir

$$\Delta R_S\Delta Mc=\frac{\hbar}{2}.$$

Wenn sich also die Masse des Universums ihrem Maximalwert genähert hat, ändert sich die Größe des Raums nicht mehr. Hat sich hingegen der Raum bis zu seiner maximalen Größe ausgeweitet, gibt es keine Massen- und damit keine Energieänderung mehr. Bei maximaler Größe des Alls führt selbst die kleinste Volumenfluktuation in der Größenordnung eines Wirkungsquantums zum Kollaps des Universums. Man darf sich diesen Urknall natürlich nicht so vorstellen, daß der Ereignishorizont sich mit Lichtgeschwindigkeit in die Punktsingularität stürzen würde,[2] denn zum Zeitnullpunkt berühren sich die Ereignishorizonte von Materie und Antimaterie, und die Expansion des Universums beginnt von neuem. Das Weltall benötigt also zu seinem Neustart weder einen Schöpfer noch eine geisterhafte Entstehung aus dem Nichts. Es war immer und es wird ewig sein, bis irgendwann nach unendlich vielen Modifikationen unser jetziges Universum wieder erscheint, mit den gleichen Vorgängen, die sich schon einmal abgespielt haben.

[2] Dies würde Milliarden Jahre dauern.

