Aufgabe: Berechnen Sie die kosmologische Konstante unter der Annahme, daß das Universum ein Schwarzes Loch ist.

Lösung: Mit der Dichte des Universums

$$\rho = \frac{M}{V_S} = \frac{3M}{4\pi R_S^3},$$

wobei M die Gesamtmasse des Alls und V_S das Volumen einer Kugel mit Schwarzschildradius R_S ist, folgt aus der Definition der kosmologischen Konstanten Λ die Relation

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}\rho = \frac{8\pi G}{c^2}\frac{3M}{4\pi R_S^3} = \frac{2GM}{c^2}\frac{3}{R_S^3}.$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Da Schwarzschildradius und Masse mittels der bekannten Beziehung

$$R_S = \frac{2MG}{c^2}$$

zusammenhängen, ergibt sich für die kosmologische Konstante ein Wert von

$$\Lambda = \frac{3}{R_S^2} = \frac{12\pi}{A_S},$$

wobei $A_S = 4\pi R_S^2$ die Oberfläche des Universums ist. Verwenden wir für den Schwarzschildradius den Wert aus Aufgabe 131, so besitzt die kosmologische Konstante den Zahlenwert

$$\Lambda = \frac{3}{R_S^2} = \frac{3}{1,485^2 \cdot 10^{54}\,\mathrm{m}^2} = 1,36 \cdot 10^{-54}\,\frac{1}{\mathrm{m}^2} = 1,36 \cdot 10^{-58}\,\frac{1}{\mathrm{cm}^2}.$$

Die Vakuumdichte ist also nochmals um zwei Größenordnungen kleiner als die ohnehin schon geringe mittlere Dichte des Alls:

$$\rho = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda = \frac{1,36 \cdot 10^{-54}}{1,9 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}} = 7,16 \cdot 10^{-29}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 7,16 \cdot 10^{-32}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

