Aufgabe: Zeigen Sie am Beispiel des Gravitationspotentials, daß es eine Singularität, deren Masse in einem einzigen zentralen Punkt konzentriert ist, nicht geben kann, weil sich ein Teil der gleichmäßig auf der Oberfläche des Ereignishorizonts verteilten Masse in der Zukunft, der andere in der Vergangenheit befindet.

Lösung: Betrachten wir zunächst Abb. 1. Im oberen Bild 1a) ist das Potential ϕ einer massebelegten Kugelschale in Abhängigkeit vom Abstand r dargestellt. Diese sogenannte Punktsingularität ist nichts anderes als ein Schwarzes Loch, dessen Entropie proportional zur Kugeloberfläche, auf der die gesamte Masse gleichförmig verteilt ist, zunimmt. Bild 1b) zeigt eine Randsingularität, also den Spezialfall einer Punktsingularität mit maximalem Schwarzschildradius R_S.

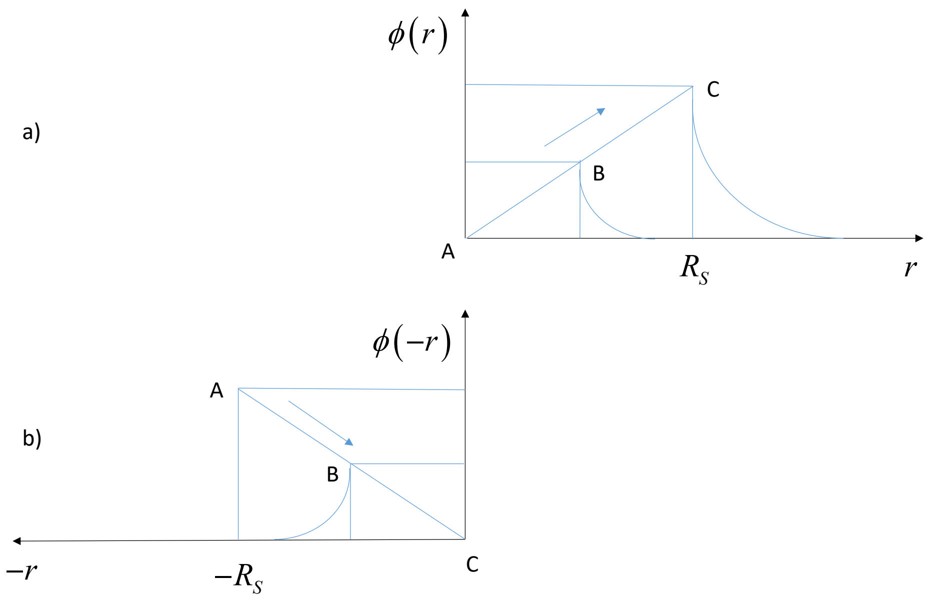

Abbildung 1. Potential einer Punktsingularität der Zukunft a) und einer Randsingularität der Vergangenheit b)

Wenn also die gesamte Masse M des Alls im Punkt A der Randsingularität konzentriert ist, ist das Potential der Punktsingularität gleich Null. Umgekehrt ist die gesamte Masse der Randsingularität verschwunden, wenn ihr Schwarzschildradius auf Null geschrumpft ist. Dafür hat sich die ursprüngliche Punktsingularität zu einer Randsingularität der Vergangenheit ausgeweitet, denn die Masse kann ja nur auf beide Singularitäten verteilt sein. Es ist also nicht möglich, den Mittelpunkt einer Singularität als den Zeitnullpunkt des Universums festzulegen, weil der beim Urknall erzeugte Schwarzschildradius der Randsingularität nur in Richtung Zukunft wandern kann.[1] Alles, was außerhalb des Schwarzschildradius des Universums ist, liegt in der Vergangenheit, was auf dem Schwarzschildradius ist, in der Gegenwart und konsequenterweise alles, was innerhalb des Schwarzschildradius des Universums ist, in der Zukunft. In Abb. 1b) ist der maximale Schwarzschildradius im Punkt A bereits erreicht, es kann also nur in die Zukunft gehen, die Singularität kann nur zerfallen. Das ist im Punkt B der Fall. In Abb. 1a) nähert sich die Punktsingularität ihrem Schwarzschildradius aus der Vergangenheit. Um dies zu betonen, wurde die radiale Achse in Abb. 1b) vorzeichenverkehrt gezeichnet. Im Punkt C ist die Randsingularität komplett verschwunden, während die Punktsingularität ihren maximalen

[1] Eine größere Ausdehnung ist nicht möglich. Der Schwarzschildradius kann nur kleiner werden.

Schwarzschildradius erreicht hat. Die Summe der beiden Potentiale bleibt also stets konstant. Das wäre nicht möglich, wenn die gesamte Masse der Punktsingularität in einem Punkt vereint wäre, dessen Masse dann gegen Unendlich ginge. Die Punktsingularität ist also nichts anderes als eine Randsingularität, deren Schwarzschildradius den endgültigen Wert null erreicht hat. Das folgt aus der strengen Proportionalität von Schwarzschildradius und Masse eines Schwarzen Lochs,

$$R_S = \frac{2MG}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad R_S = \frac{c^2}{8\pi\sigma G},$$

wobei die Masse stets auf der Oberfläche der Singularität verteilt[2] ist. Dabei sind c die Lichtgeschwindigkeit und G die Gravitationskonstante. Zwischen der Volumendichte ρ und der Flächendichte σ gilt die bekannte Beziehung

$$\sigma = \frac{1}{3}\rho R_S.$$

Mit der gegenwärtigen Dichte des Alls ergibt sich ein Schwarzschildradius von

$$R_S = ct_S = 19{,}6\cdot 10^9\ \text{Lj},$$

und das zugehörige Weltalter beträgt

$$t_S = \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho G}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi\cdot 4{,}7\cdot 10^{-27}\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}\cdot 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}}} = 19{,}6\cdot 10^9\ \text{a}.$$

Diese Angaben stimmen gut mit der gegenwärtig sichtbaren Masse des Universums überein:

$$M = \frac{R_S c^2}{2G} = \frac{c^3}{2G}t_S = \frac{\left(2{,}998\cdot 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\right)^3}{2\cdot 6{,}673\cdot 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}}\cdot 6{,}17\cdot 10^{17}\,\text{s} = 1{,}25\cdot 10^{53}\,\text{kg}.$$

Alter und Ausdehnung weichen allerdings von den derzeitigen Werten ab, weil die Mehrheit der Physiker der Meinung ist, das All sei keine Singularität, sondern ein offenes System, das sich unendlich weit ausdehnt.[3] Nimmt man indes an, daß das Universum ein abgeschlossenes System ist, übersteigen Alter und Ausdehnung die derzeit bekannten Werte um etwa die Hälfte.[4]

In der weiteren Entwicklung des Universums schrumpft der Schwarzschildradius der Randsingularität immer weiter, und dementsprechend zerfällt auch die Masse, wohingegen der Schwarzschildradius der Punktsingularität immer weiter zunimmt. Hat die Punktsingularität die Vergangenheit eingeholt, kommt es zum Urknall mit der Antimaterie, und nicht etwa, weil sich die Massen der beiden Singularitäten vereinigen würden. Es scheint, als bekäme die Punktsingularität ihre wachsende Masse durch das Nadelöhr der Randsingularität nachgeliefert.[5] Zum Zeitpunkt des Urknalls trennen sich Zukunft und Vergangenheit und nehmen unterschiedliche

[2] Schwarze Löcher könnten nicht zerfallen, wenn es anders wäre.

[3] Diese Annahme widerspricht allerdings der Vorstellung, daß die Entropie nur in einem abgeschlossenen System zunehmen kann.

[4] Das stellt die Urknalltheorie nicht in Frage.

[5] Während des Urknalls ist die gesamte Materie aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie in einem einzigen Raumzeitpunkt vereinigt. Dieser liegt aber nicht etwa im euklidischen Mittelpunkt der Singularität, sondern wegen der vierten Dimension auf dem Rand, zumal innerhalb der Singularität gar keine Gravitationskraft herrscht.

Vorzeichen an, aber nur zu diesem Zeitpunkt. Denn bereits mit der Vereinigung der beiden Singularitäten bilden sich auf dem Rand der entstandenen neuen Randsingularität sofort wieder neue kleine Schwarze Löcher, die Zentren der späteren Galaxien, und diese Punktsingularitäten beginnen sich daraufhin in die Zukunft auszudehnen. Was aus der Vergangenheit zu uns kommt, ist dunkle Energie, die voll erst wieder beim nächsten Urknall in Erscheinung tritt.

Im folgenden lösen wir nun die Aufgabenstellung. Der Zusammenhang des Potentials ϕ mit der Massendichte ρ ist durch die Poisson-Gleichung gegeben:

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho.$$

Im Innenraum einer Punktsingularität ist die Dichte null, daher gilt dort die Laplace-Gleichung

$$\Delta\phi_i = 0.$$

Da das Problem kugelsymmetrisch ist, verschwinden die Ableitungen des Potentials nach den Winkelkoordinaten und vom Laplace-Operator verbleiben nur die Radialanteile,

$$\Delta\phi_i = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right) = 0.$$

Nach Multiplikation mit r^2 liefert die Integration über r den Ausdruck

$$\int\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\right)dr = r^2\frac{\partial\phi_i}{\partial r} = C_1$$

bzw. die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2},$$

wobei C_1 eine Integrationskonstante ist. Nochmalige Integration ergibt dann das Gravitationspotential einer Punktsingularität im Innenraum:

$$\int\frac{\partial\phi_i}{\partial r}dr = C_1\int\frac{dr}{r^2},$$

d.h.

$$\phi_i = -C_1\frac{1}{r} + C_2,$$

mit einer weiteren Integrationskonstanten C_2. Weil das Potential bei Null nicht gegen Unendlich gehen darf, muß $C_1 = 0$ sein. Wegen

$$\frac{d\phi_i}{dr} = 0$$

herrschen demnach im Innern einer Punktsingularität keine Gravitationskräfte und das Potential ist konstant,

$$\phi_i(r) = C_2.$$

Weil das innere Potential auf dem Rand aus Stetigkeitsgründen dem einer Punktmasse gleich sein muß, gilt

$$\phi_i\left(r\right)=-\frac{GM}{R_S}=-\frac{G}{R_S}\frac{4\pi}{3}\frac{3\sigma}{R_S}R_S^3=-4\pi G\sigma R_S.$$

Auf dem Rand der Punktsingularität gilt

$$\Delta\phi_a=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_a}{\partial r}\right)=4\pi G\frac{3\sigma}{R_S}.$$

Das ist die Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten. Deren Umformung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_a}{\partial r}\right)=4\pi G\frac{3\sigma}{R_S}r^2.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck,

$$\int\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi_a}{\partial r}\right)dr=4\pi G\frac{3\sigma}{R_S}\int r^2dr,$$

folgt

$$r^2\frac{\partial\phi_a}{\partial r}=4\pi G\frac{3\sigma}{R_S}\frac{r^3}{3}+C_3=4\pi G\frac{\sigma}{R_S}r^3+C_3$$

bzw.

$$\frac{\partial\phi_a}{\partial r}=4\pi G\frac{\sigma}{R_S}r+\frac{C_3}{r^2},$$

mit der weiteren Integrationskonstanten C_3. Die nochmalige Integration

$$\int\frac{\partial\phi_a}{\partial r}dr=4\pi G\frac{\sigma}{R_S}\int rdr+C_3\int\frac{dr}{r^2}$$

liefert das Gravitationspotential auf dem Rand,

$$\phi_a=2\pi G\sigma\frac{r^2}{R_S}-\frac{C_3}{r}+C_4,$$

mit der Integrationskonstanten C_4. Da sich die Kraftwirkung im Mittelpunkt aufheben muß, gilt $C_3=0$ und das Potential lautet

$$\phi_a\left(r\right)=2\pi G\sigma\frac{r^2}{R_S}+C_4.$$

Wegen $\phi_a\left(0\right)=C_4$ folgt

$$\phi_a\left(R_S\right)=2\pi G\sigma R_S+\phi_a\left(0\right).$$

Auf dem Rand müssen beide Potentiale gleich sein, daher folgt weiter

$$\phi_i\left(R_S\right) = -4\pi G\sigma R_S = 2\pi G\sigma R_S + \phi_a\left(0\right),$$

d.h. $\phi_a\left(0\right) = -6\pi G\sigma R_S$, und das Potential auf dem Rand lautet

$$\phi_a\left(r\right) = 2\pi G\sigma \frac{r^2}{R_S} - 6\pi G\sigma R_S = 2\pi G\sigma\left(\frac{r^2}{R_S} - 3R_S\right),$$

während das Potential im Innern der Singularität gegeben ist durch

$$\phi_i\left(r\right) = -4\pi G\sigma R_S.$$

Damit können wir es geschlossen darstellen:

$$\phi\left(r\right) = \begin{cases} -4\pi G\sigma R_S & \text{für} \quad r < R_S, \\ 2\pi G\sigma\left(\dfrac{r^2}{R_S} - 3R_S\right) & \text{für} \quad r \geq R_S, \end{cases}$$

womit sich an der Stelle $r = R_S$ ein stetiger Übergang ergibt:

$$\phi\left(R_S\right) = -4\pi G\sigma R_S.$$

Während die Ableitung des inneren Potentials und damit die Kraftwirkung verschwindet,

$$\frac{d\phi_i}{dr} = 0,$$

lautet die Ableitung des äußeren Potentials

$$\frac{d\phi_a}{dr} = 4\pi G\sigma \frac{r}{R_S}.$$

Auf dem Rand ist

$$\frac{d\phi_a}{dr}\left(R_S\right) = 4\pi G\sigma = \frac{GM}{R_S^2}$$

und von Null verschieden. Die ersten Ableitungen der Potentiale, d.h. die Gravitationskräfte, müssen im Punkt $r = R_S$ nicht übereinstimmen. Würden wir in einer Singularität leben, wären wir also keinerlei Kraftwirkungen ausgesetzt. Außerhalb der Singularität jedoch wirken die vollen Kräfte, die von der Masse auf dem Rand ausgehen, nicht von der Masse im Innern, da dort keine Masse ist. Eine Punktsingularität hat demnach nur eine Außenwirkung, d.h. außerhalb ihres Ereignishorizonts verhält sie sich wie eine Punktmasse. Es bewahrheitet sich also, daß aus einer Singularität nichts entweichen kann, da die gesamte Masse, und damit auch die gesamte Energie, auf dem Ereignishorizont sitzt, und nicht im Zentrum.

