Aufgabe: Beweisen Sie, daß die in einer Singularität konzentrierte Masse eines Schwarzen Lochs bei seiner Zerstrahlung auf dem Rand des Schwarzen Lochs erhalten bleibt.

Beweis: Zur Beschreibung des Problems verwenden wir am zweckmäßigsten Kugelkoordinaten. Diese sind mit den kartesischen Koordinaten auf folgende Weise verknüpft:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Die totalen Differentiale lauten dann:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi = \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi,$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,$$

wobei die Determinante des Volumenelements

$$dV = |D|\,drd\theta d\varphi$$

gegeben ist durch

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$$
$$= r^2\sin\theta.$$

Solange die Masse in der Singularität konzentriert ist, gilt wegen

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} m_0\delta(\vec{r}) & \text{für} \quad \vec{r} = 0, \\ 0 & \text{für} \quad \vec{r} \neq 0 \end{cases}$$

in Kugelkoordinaten

$$m = \int_V \rho(r,\theta,\varphi)\,d^3r = m_0\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\delta(\vec{r})\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = m_0.$$

Ist die Masse nach der Zerstrahlung flächenhaft auf dem Rand des ursprünglichen Schwarzen Lochs verteilt, während sein Schwarzschildradius gegen Null geht, so gilt wegen

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \sigma_R \delta(r-R) & \text{für } r = R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Massenverteilung

$$m = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma_R \delta(r-R) r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \sigma_R \int_0^\infty \delta(r-R) 4\pi r^2 dr.$$

Da die Flächendichte auf der Kugeloberfläche gegeben ist durch

$$\sigma_R = \frac{m_0}{4\pi R^2},$$

folgt schließlich wegen

$$\int_0^\infty \delta(r-R) f(r) dr = f(R)$$

für eine beliebige Funktion *f* die Massenerhaltung auf dem Rand des Schwarzen Lochs zu

$$m = 4\pi\sigma_R \int_0^\infty \delta(r-R) r^2 dr = \frac{m_0}{R^2} \int_0^\infty \delta(r-R) r^2 dr = m_0,$$

qed

Anmerkung: Falls das Universum endlich ist, wovon man aus gutem Grunde ausgehen kann, besitzt es einen Schwarzschildradius, der größer sein muß als der Radius des sichtbaren Universums. Wie man leicht nachrechnet, fehlt ein Teil der Masse im Universum, der sich folglich hinter dem sichtbaren Rand des Alls befinden muß. Jene dunkle Energie liegt aber immer noch innerhalb des Schwarzschildradius. Je stärker also das sichtbare All durch Hawking-Strahlung zerstrahlt, desto mehr Energie reichert sich im unsichtbaren Teil des Universums an, auf dessen Rand sich dann ebenfalls eine (zweidimensionale) Singularität ausbildet, da die Masse ja nicht einfach verschwinden kann. Während der Schwarzschildradius des sichtbaren Alls durch die Zerstrahlung Schwarzer Löcher immer weiter abnimmt, nimmt er im dunklen Teil immer weiter zu. Diejenige Energie, die den Zentren der Schwarzen Löcher entzogen wird, reichert sich in der Singularität auf dem Rand des Universums immer weiter an, denn die Energie als Ganzes muß erhalten bleiben. Im vierdimensionalen Raum besteht nach der Speziellen Relativitätstheorie ohnehin kein Unterschied zwischen einer punktförmigen Singularität und einer sphärischen Singularität, weil sich Orts- und Zeitkomponente des infinitesimalen Wegelements gegenseitig wegheben. Wenn also das sichtbare Universum vollständig zerstrahlt ist, erreicht das dunkle Universum seine volle Ausdehnung. Das wiederum bedeutet, daß das sichtbare Universum vollends im dunklen verschwindet, ehe es durch einen weiteren Urknall neu entsteht.