Aufgabe: Berechnen Sie die Entropie eines Räuber-Beute-Systems und diskutieren Sie das Ergebnis am Beispiel des Weltalls unter der Annahme, daß auch der Kosmos ein Räuber-Beute-System darstellt.

Lösung: Jedes Räuber-Beute-System läßt sich klassisch durch die Lotka-Volterra-Gleichungen beschreiben:

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2, \qquad \frac{dN_2}{dt} = \gamma_2 N_1 N_2 - \varepsilon_2 N_2,$$

die sich nur numerisch integrieren lassen:

$$N_1(t) = N_1(t_0)\exp\left(-\gamma_1 \int_{t_0}^{t} \left(N_2(t) - N_2^*\right) dt\right), \qquad N_2(t) = N_2(t_0)\exp\left(\gamma_2 \int_{t_0}^{t} \left(N_1(t) - N_1^*\right) dt\right)$$

wobei $N_2(t_0)$ und $N_1(t_0)$ die Anfangswerte der Räuber- und Beutepopulation zum Zeitpunkt t_0 sind. Die numerische Lösung dieses Gleichungssystems unter den Anfangsbedingungen

$$t_0 = 0, \quad N_1(t_0) = N_1^*, \quad N_2(t_0) = N_2^{\min},$$

bei denen sich die Räuber-Population im Minimum und die Beutepopulation im Gleichgewichtspunkt befindet, mit den Eckdaten

$$\begin{aligned} N_1^{\min} &= 100, \quad N_1^* = 467{,}8, \quad N_1^{\max} = 1300, \\ N_2^{\min} &= 10, \quad N_2^* = 58{,}8, \quad N_2^{\max} = 180 \end{aligned}$$

sowie einem Ratenverhältnis $\gamma_2/\gamma_1 = 0{,}1565$ und einer Sterberate von $\gamma_1 = 0{,}01$, wurde bereits in Aufgabe 46 beschrieben und braucht an dieser Stelle nicht wiederholt zu werden. Lediglich die Schrittweite muß, um den Integrationsfehler klein zu halten, auf $t_i - t_{i-1} = 0{,}001$ verfeinert werden. Das Ergebnis ist periodisch und für drei Räuber-Beute-Zyklen in Abb. 1 dargestellt.

Aus den Maxima oder Minima der Beute- oder auch Räuberpopulation können wir die Periodendauer T ablesen, die ein Räuber-Beute-System für einen vollständigen Durchlauf benötigt. Für die Berechnung der Entropie benötigen wir die relativen Teilchenzahlen

$$x_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \quad x_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}, \quad x_1 + x_2 = 1,$$

und zwar müssen diese sich paarweise zu 1 ergänzen. Die ideale Mischungsentropie berechnet sich dann aus der Formel

$$\Delta S = -k_B \left(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2\right),$$

wobei wir die Boltzmannkonstante k_B aus Normierungsgründen 1 setzen.

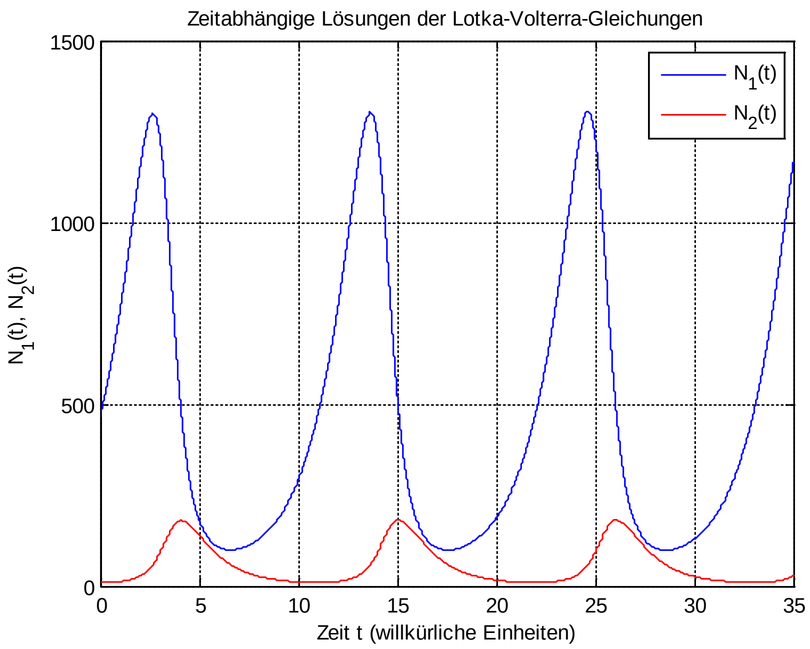

Abbildung 1 Populationsgrößen von Beute- und Räuberpopulation als Funktionen der Zeit

Wird die Räuber-Beute-Kurve im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen, so ergeben sich als Extremwerte der relativen Teilchendichten die Angaben in Tab. 1:

	x_1	x_2
(1)	$x^*_{1,\min} = \dfrac{N_1^*}{N_1^* + N_2^{\min}} = 0{,}98$	$x_2^{\min} = \dfrac{N_2^{\min}}{N_1^* + N_2^{\min}} = 0{,}02$
(2)	$x_1^{\max} = \dfrac{N_1^{\max}}{N_1^{\max} + N_2^*} = 0{,}96$	$x^*_{2,\max} = \dfrac{N_2^*}{N_1^{\max} + N_2^*} = 0{,}04$
(3)	$x^*_{1,\max} = \dfrac{N_1^*}{N_1^* + N_2^{\max}} = 0{,}72$	$x_2^{\max} = \dfrac{N_2^{\max}}{N_1^* + N_2^{\max}} = 0{,}28$
(4)	$x_1^{\min} = \dfrac{N_1^{\min}}{N_1^{\min} + N_2^*} = 0{,}63$	$x^*_{2,\min} = \dfrac{N_2^*}{N_1^{\min} + N_2^*} = 0{,}37$

Tabelle 1 Relative Teilchendichte der Räuber- und Beutepopulation bei maximaler und minimaler Populationsgröße

Es zeigt sich, daß überall dort, wo sich eine Population in einem Extrempunkt befindet, die andere sich ebenfalls in einem Dichteextremum befindet, jedoch einem entgegengesetzten, d.h. wenn x_1 sein Maximum annimmt, ist x_2 im Minimum und umgekehrt. Das liegt daran, daß wir die beiden Größen auf Eins normiert haben. Die Entropie muß diesem Verhalten klarerweise folgen, weil sie überall dort minimal wird, wo eine der beiden Populationen nahezu ausgestorben ist bzw. ausschließlich eine der beiden Arten überlebt hat. Umgekehrt wird die Entropie ihr Maximum annehmen, wenn beide Populationen sich in ihrer Dichte am stärksten annähern, wobei man in einem Räuber-Beute-System nicht unbedingt von einer völligen Gleichheit ausgehen kann. Auch das ist durch einen Vergleich der Abbildungen 2 und 3 gut zu erkennen. Zusätzlich sehen wir in Abb. 3, daß die lokalen Maxima und Minima der Gesamtteilchenzahl dem Entropieverlauf vorauseilen.

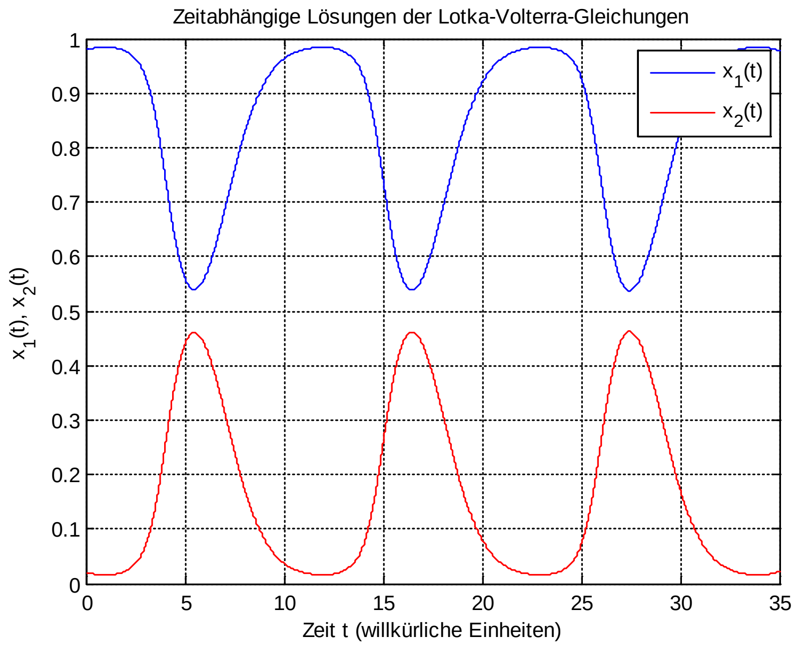

Abbildung 2 Populationsanteile von Räuber- und Beutepopulation an der Gesamtpopulation

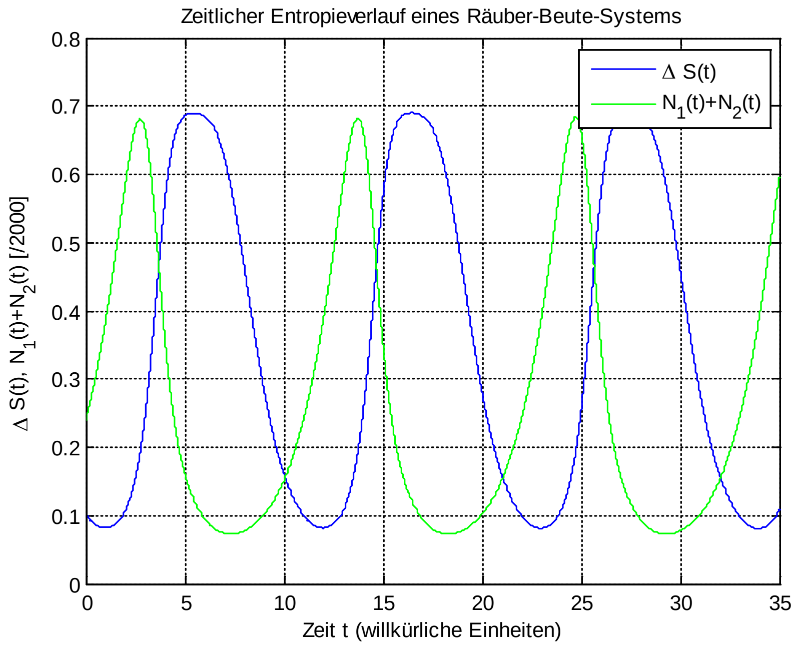

Abbildung 3 Entropie (relative Einheiten) und absolute Populationsgröße als Funktionen der Zeit

In Abb. 4 haben wir die Mischungsentropie einmal gegen die Dichte der Beutepopulation und zum andern gegen die der Räuberpopulation aufgetragen. Hieran erkennt man das Entropieverhalten eines Räuber-Beute-Systems ganz deutlich. Wenn die Räuberdichte abnimmt, kann sich die Beute wieder erholen und die Entropie nimmt ab, weil die Räuber auszusterben drohen. Nimmt umgekehrt die Beutedichte ab, hat die der Räuber offensichtlich stark zugenommen und die Entropie steigt, weil sich die Populationsdichten einander annähern. Die Dichte der Beute pendelt in unserem Fall zwischen 0,72 und 0,98, die der Räuber zwischen 0,04 und 0,37.

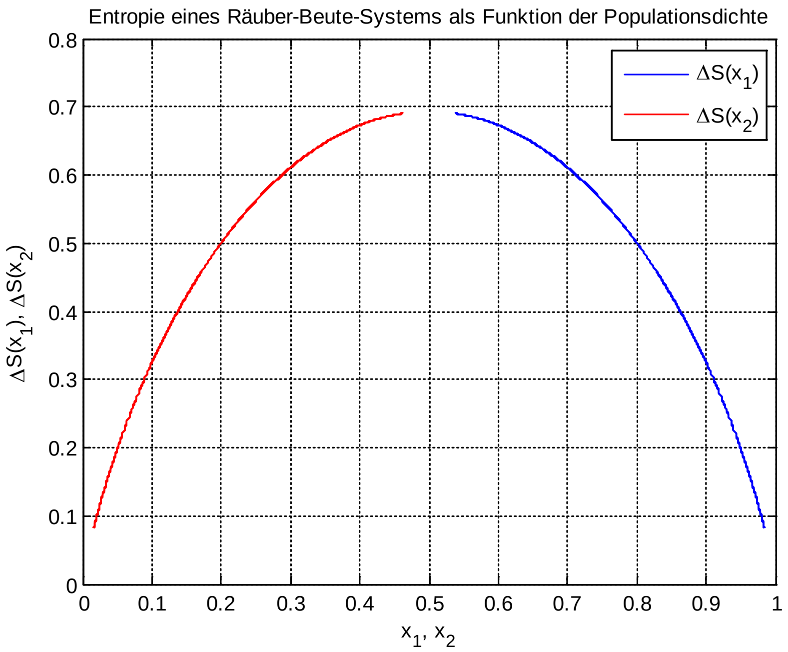

Abbildung 4 Entropie (relative Einheiten) als Funktion der Populationsdichten von Räuber- und Beutepopulation

Man braucht zur Erläuterung eines Räuber-Beute-Systems im Prinzip nicht mehr als zwei „Spezies" - die auch nichtbiologischen Ursprungs sein können -, die sich aber gegenseitig in ihrer Koexistenz bedingen und um einen Gleichgewichtspunkt „kreisen", also irgendeinem Erhaltungssatz genügen. Unsere Annahme soll nun sein, daß die Gesetze der Evolution universell sind und nicht nur für die belebte, sondern auch für die unbelebte Natur gelten, weil organische Materie nur einen Spezialfall der anorganischen darstellt und somit direkt aus der letzteren hervorgeht. Wenn diese Annahme zutrifft, müßte insbesondere das Universum selbst ein Räuber-Beute-System sein, sofern es den allgemeinen Erhaltungssätzen der Physik genügt. Betrachten wir etwa den von der Dunklen Energie aufgespannten Raum als Beute des von der Materie gleich welcher Form (gewöhnliche oder Dunkle) aufgespannten Raums, dadurch daß Materie in ein Schwarzes Loch hineingezogen werden kann, so verschwindet sie praktisch aus dem Universum und mit ihr die Energie, bis das Schwarze Loch zerstrahlt ist, was aber bei ständig wachsender Masse nie der Fall sein wird. Andererseits muß der Impuls auch bei Ausdehnung des Universums konstant bleiben, was bei zunehmender Geschwindigkeit der Galaxien nur möglich ist, wenn gleichzeitig die Masse geringer wird. Der Massenverlust kann folglich nur durch die Zunahme einer fiktiven Dunklen Energie kompensiert werden. Da die Gesamtenergie des Alls konstant ist, muß auch die Summe aus gewöhnlicher und Dunkler Materie und Dunkler Energie konstant sein, d.h. der Masseverlust von Dunkler und gewöhnlicher Materie aufgrund der Expansion der Weltalls kann nur durch die Zunahme der Dunklen Energie kompensiert werden. Das Umgekehrte gilt ebenfalls, falls das All nach dem Verschwinden sämtlicher Materie aus der Dunklen Energie neu entstehen sollte. Dem entspricht aber genau das Verhalten eines Räuber-Beute-Systems, wo starke Schwankungen zwischen den beiden Populationen auftreten können, die Gleichgewichtswerte aber unverändert bleiben. Wenn also unser Raum, der mit gewöhnlicher und auch Dunkler Materie angefüllt ist, durch die Ausdehnung des Universums immer größer wird, muß der Raum, der von der Dunklen Energie aufgespannt wird, nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in gleichem

Maße verschwinden, zumal die Gravitationswechselwirkung nicht mehr nach außen dringt. Dem kommt zugute, daß die Masse in Schwarzen Löchern zu eine Singularität entartet ist, d.h. das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum hört nach Albert Einstein auf zu existieren, sobald alle Sterne ausgebrannt sind und alle Materie von Schwarzen Löchern eingefangen und verschluckt wurde. Dann aber ist die Dunkle Energie auf 100 % angewachsen und der Urknall kann aufs neue beginnen, wie es das analoge Räuber-Beute-System vorschreibt.

