Aufgabe: Zeigen Sie, daß die komplette Materie unter der Annahme, daß die Protonen eine ziemlich hohe Lebensdauer haben, kurz vor dem Urknall zerstrahlt.

Lösung: Auch für das All gilt der Viererimpuls *p*, besser bekannt unter dem Namen Äquivalenz von Masse und Energie, die definiert durch

$$p = m_0 c = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2},$$

wobei $\mathbf{p} = \left(p_x, p_y, p_z\right)$ der ganz gewöhnliche dreidimensionale Impuls ist. Allerdings sieht man sofort, daß $|\mathbf{p}| \neq p.$ Der Viererimpuls entspricht also der mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Ruhemasse des Alls. Wenn sich etwas mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, hat es allerdings keine Ruhemasse mehr, dieser Begriff verliert in diesem Fall seinen Sinn. Die Umstellung der obigen Gleichung ergibt

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4,$$

wobei $\mathbf{p}$ nun nichtlinear mit der Geschwindigkeit anwächst:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Das All besitzt im stationären Zustand $\mathbf{v} = 0$ die Energie $E = m_0 c^2.$ Im bewegten, d.h. im expandierenden Zustand ändert sich das, denn dann gilt

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^2}{c^2} c^4 = \left[\frac{m_0^2 - m_0^2 \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2 \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m^2 c^4.$$

Im Grenzfall $v = c$ ergäbe dies wegen

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

eine unendliche Energie- und Impulszunahme, was wegen des Verstoßes gegen den Energieerhaltungssatz nicht sein kann. Vielmehr zerfallen das Proton und damit seine Ruhemasse nach dem Zerfallsgesetz in Strahlung, d.h.

$$m_0(t) = m_0(0) e^{-\Gamma t},$$

wobei Γ die Zerfallskonstante ist. Da das Proton extrem langlebig ist, ist die Zerfallskonstante entsprechend klein und wir können für kleine Zeiten die Näherung

$$m_0(t) \approx m_0(0)(1-\Gamma t)$$

verwenden. Hilfsweise setzen wir

$$E^2 = m_0^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 \equiv E_{pot}^2 + E_{kin}^2$$

und postulieren, daß sich die Viererenergien quadratisch addieren. Dabei sind

$$E_{pot} = m_0c^2 \equiv p_0c \quad \text{und} \quad E_{kin} = |\mathbf{p}|c = mvc.$$

Sehen wir die Masse als konstante Größe an,

$$E^2 = m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^4 + m^2v^2c^2,$$

so nimmt die potentielle Energie in dem Maße ab, wie die kinetische Energie zunimmt. Gehen wir mit dem Ansatz des Protonenzerfalls, wobei m_0 jetzt die Ruhemasse des Alls zum Zeitpunkt des Urknalls $t=0$ ist, in die obige Gleichung,

$$E^2 = m^2c^4 - \frac{m_0^2e^{-2\Gamma t}v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2e^{-2\Gamma t}v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

und ersetzen die Zeit

$$t = \frac{v}{a\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

im System der Singularität gemäß der Speziellen Relativitätstheorie durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit *v*, wobei *a* die Beschleunigung des Universums ist, so folgt

$$E^2 = m^2c^4\left\{1-e^{-\frac{2\Gamma v}{a\sqrt{1-v^2/c^2}}}\frac{v^2}{c^2}\right\} + m^2c^4e^{-\frac{2\Gamma v}{a\sqrt{1-v^2/c^2}}}\frac{v^2}{c^2}.$$

Mittels der Substitution $x = v/c$ lauten die Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie dann wie folgt:

$$E_{kin}(x) = Exe^{-\frac{\Gamma c}{a}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{bzw.} \quad E_{pot}(x) = E\sqrt{1-x^2e^{-\frac{2\Gamma c}{a}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}.$$

Dabei gelten in der Singularität die Spezialfälle gemäß folgender Tabelle:

x	0	1
$E_{kin}(x)$	0	0
$E_{pot}(x)$	E	E

Das heißt, daß die komplette Materie, sofern noch vorhanden, trotzdem daß sie fast Lichtgeschwindigkeit erreicht hat, kurz vor dem Urknall zerstrahlt. Wir benötigen für unser Verständnis die Extremwerte der kinetischen Energie, die sich durch Bildung der 1. Ableitung nach x ergeben,

$$\frac{d}{dx}E_{kin}(x) = Ee^{-\frac{\Gamma c}{a}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\left(1-\frac{\Gamma c}{a}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3}\right),$$

und setzen diese gleich null. Das reelle Extremum hat abnehmende Krümmung, es handelt sich daher um ein lokales Maximum, welches bei

$$\left(1-x^2\right)^3 = \left(\frac{\Gamma c}{a}\right)^2 x^2$$

liegt. Mit der Substitution $y = x^2$ kommen wir auf eine kubische Gleichung der Form

$$y^3 - 3y^2 + 3\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{\Gamma c}{a}\right)^2\right]y - 1 = 0.$$

Da der quadratische Term in der eckigen Klammer sehr klein gegen 1 ist, muß die Lösung für y sehr nahe bei $x = 1$ bzw. $v \approx c$ liegen. Wie man in Abb. 1 erkennt, verschiebt sich das Maximum der kinetischen Energie zum Maximalwert 1 hin.

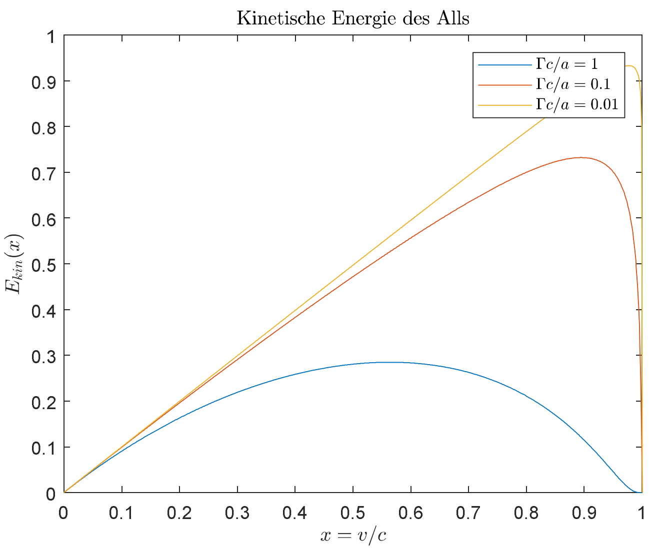

Abbildung 1. Kinetische Energie des Alls in Abhängigkeit von Beschleunigung und Zerfallsrate

Bei der extrem hohen Lebensdauer τ des Protons und der verschwindend geringen Zerfallsrate $\Gamma = 1/\tau$ rückt das Maximum der kinetischen Energie immer weiter an die Lichtgeschwindigkeit heran. Umgekehrt verschwindet damit auch die potentielle Energie. Die Gesamtenergie $E = mc^2$ bleibt aber während des Urknalls erhalten. Von einer Entstehung der Welt kann daher keine Rede sein.