

# Physikaufgabe 125

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Berechnen Sie die Zeit- und Energiefluktuationen des Vakuums und legen Sie dar, wie sich der Übergang von einem Schwarzen Loch zu einer Singularität vollzieht.

**Lösung:** In Aufgabe [124] wurde der Schwarzschildradius nach einem Gravitationskollaps des Alls berechnet. Die Masse  $M$  einer Vollkugel mit Schwarzschildradius  $R_s$  und Dichte  $\rho_s$  – nicht zu verwechseln mit der Dichte  $\rho$  des offenen Universums – ist demnach gegeben durch

$$M = \frac{5 c^2}{3 G} R_s = \frac{4\pi}{3} \rho_s R_s^3.$$

Bei Erhaltung der Ruhemasse, allerdings ohne Protonenzerfall, gilt für die Dichte eines Schwarzen Lochs die Relation

$$\rho_s = \frac{5}{4\pi} \frac{c^2}{G R_s^2}.$$

Der genaue Zahlenwert für das gesamte Universum ergibt im Innern dieses Schwarzen Lochs die Dichte

$$\rho_s = \frac{5}{4\pi} \frac{2,998^2 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 4,46^2 \cdot 10^{50} \text{ m}^2} = 2,694 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Sie liegt um das 50fache über der des gegenwärtigen Alls. Sämtliche Schwarzen Löcher zerfallen bekanntlich durch Hawking-Strahlung (siehe Abb. 1).

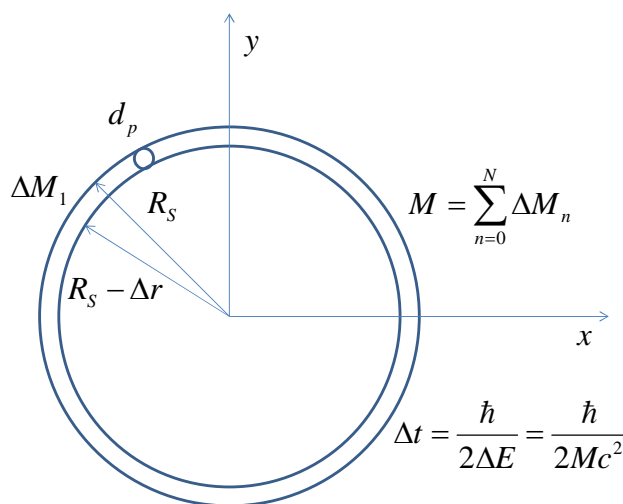


Abbildung 1. Zerstrahlendes Schwarzes Loch am Ende des Universums

Die Gravitation krümmt dabei den Raum so stark, daß keine Strahlung mehr nach außen entweichen kann. Was aber geschieht, wenn sich sämtliche Schwarzen Löcher des Universums zu einem einzigen Schwarzen Loch vereinigen, welches die gesamte verbliebene Masse des Alls

## Physikaufgabe 125

---

in sich birgt? Nun, nach der Formel von Hawking gehen sowohl die Temperatur und damit auch die kinetische Energie gegen Null, wenn die Masse sehr groß wird,

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1} \cdot 2,998^3 \cdot 10^{24} \text{ m}^3 \text{ s}^{-3}}{8\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 10^{53} \text{ kg} \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}} = 1,23 \cdot 10^{-30} \text{ K},$$

d.h. das All kühlt sich bis fast auf den Wert des absoluten Temperaturnullpunkts ab. Somit könnte es also niemals wieder zu einem weiteren Urknall kommen. Nun hängt aber die Lebensdauer eines solchen Universums nach Hawking von der dritten Potenz seiner Masse ab,

$$\tau = \frac{G^2 M^3}{\hbar c^4}.$$

Normiert auf die Sonnenmasse ergibt sich nach der folgenden Näherungsformel ein unvorstellbar großer Wert von

$$\tau \approx 10^{64} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \text{ Jahre} = 10^{64} \left( \frac{10^{53} \text{ kg}}{1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \right)^3 \text{ Jahre} = 1,27 \cdot 10^{132} \text{ Jahre},$$

immer vorausgesetzt, daß die Protonen nicht schon früher zerfallen. Doch wohin sollte die Strahlung entweichen, wenn die Welt jenseits des Schwarzschildradius aufhört? Durch die Zerstrahlung schrumpft letzterer jedenfalls, d.h. das Universum muß in eine Singularität münden, da aufgrund verschwindender Ruhemasse auch die Masse selbst verschwindet. Die vom Schwarzen Loch nach „außen“ abgestrahlte Energie kann auch als negative oder fehlende Energie interpretiert werden, und sie muß sich als dunkle Energie irgendwo außerhalb des Schwarzen Lochs aufhalten. Diesen ominösen Raum kann man aufgrund der Reziprozität von Zeit und Energie bzw. Ort und Impuls als reziproken Raum bezeichnen, der außerhalb der uns bekannten Welt liegt, da wir am Ende aller Tage, ob wir wollen oder nicht, in das fusionierte Schwarze Loch hineingezogen werden – wenn es uns dann noch gibt. Das Schwarze Loch wird sich also nach Ablauf seiner Lebensdauer in eine Singularität auflösen, in der es keine Ruhemasse mehr gibt, wohl aber elektromagnetischen Impuls. Dann wird die gesamte beim Urknall vorhandene Energie in dieser Singularität vereint sein. Wenn die Photonen eine derzeit nicht bekannte Energieschwelle überschreiten, kommt es zu den entsprechenden Paar-Reaktionen, die zu Materie und Antimaterie führen. Und so wie die Materie in Energie, die an den reziproken Raum abgegeben wird, zerstrahlt, wird durch die Photon-Photon-Reaktion der Gammaquanten überschüssige Materie erzeugt, die aufgrund der CP-Verletzung in den realen Raum zurückfließt. Bereits Andrei Sacharow merkte in den 1960er Jahren an, daß die CP-Verletzung eine der Voraussetzungen dafür ist, dass es im Universum die beobachtete große Dominanz der Materie gegenüber der Antimaterie gibt.

Wir berechnen nun die Größe dieser Singularität. Sei etwa

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_S r^3$$

## Physikaufgabe 125

---

die Masse einer Kugel homogener Massenverteilung mit Radius  $r$ . Dann ist das Differential dieser Masse gegeben durch

$$dm = 4\pi\rho_s r^2 dr.$$

Zunächst zerstrahlt die Masse  $\Delta M_1$  der äußersten Kugelschale zwischen  $R_s$  und  $R_s - \Delta r$ , weil diese direkt an den reziproken Raum angrenzt,

$$\Delta M_1 = \int_{M(R_s - \Delta r)}^{M(R_s)} dm = \frac{4\pi}{3} \rho_s \left( R_s^3 - (R_s - \Delta r)^3 \right).$$

Mit Hilfe der binomischen Formel

$$(R_s - \Delta r)^3 = R_s^3 - 3R_s^2\Delta r + 3R_s\Delta r^2 - \Delta r^3$$

können wir den obigen Ausdruck umformen in

$$\Delta M_1 = 4\pi\rho_s\Delta r R_s^2 \left( 1 - \frac{\Delta r}{R_s} + \frac{1}{3} \frac{\Delta r^2}{R_s^2} \right) \approx 4\pi\sigma_s R_s^2,$$

wobei

$$\sigma_s = \rho_s\Delta r = \frac{1}{2}\sqrt{2}\rho_s d_p$$

die Oberflächendichte und  $d_p$  der Durchmesser eines Nukleons (Protons oder Neutrons) sind. Den Beitrag der Elektronen zur dichtesten Kugelpackung können wir vernachlässigen. Damit gilt

$$\Delta M_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \rho_s d_p R_s^2,$$

so daß sich mit dem Schwarzschildradius von oben ein Massenbeitrag

$$\Delta M_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \cdot 2,694 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot 4,46^2 \cdot 10^{50} \text{ m}^2 = 8,09 \cdot 10^{12} \text{ kg}$$

ergibt. Der Zeitradius der Raumzeit beträgt also, wenn die äußerste Schicht komplett abgetragen ist,

$$\Delta t_1 = \frac{\hbar}{2\Delta E_1} = \frac{\hbar}{2\Delta M_1 c^2} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg} \cdot \text{s}}{2 \cdot 8,09 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot 2,998^2 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 7,25 \cdot 10^{-65} \text{ s}.$$

Der Schwarzschildradius wird demzufolge mit jeder weiteren komplett in Strahlung umgewandelten Kugelschale immer kleiner und verschwindet für  $n = N$  schließlich ganz,

## Physikaufgabe 125

$$R_{S,n} = R_S \left( 1 - \frac{n\Delta r}{R_S} \right),$$

wobei  $R_S = R_{S,0} = N\Delta r$ . Den sukzessiven Massenverlust durch Zerstrahlung der  $n$ ten Schicht können wir mit Hilfe des Ausdrucks

$$\Delta M_n = 4\pi\sigma_S R_S^2 \left( 1 - \frac{n\Delta r}{R_S} \right)^2$$

berechnen, wobei  $\Delta M_0 = 4\pi\sigma_S R_S^2$  und  $\Delta M_N = 0$ . Bei Verwendung der Binomialformel

$$\left( R_S - (n-1)\Delta r \right)^3 - \left( R_S - n\Delta r \right)^3 = 3R_S^3 \left[ \frac{\Delta r}{R_S} - (2n-1) \frac{\Delta r^2}{R_S^2} + \frac{1}{3} (3n^2 - 3n + 1) \frac{\Delta r^3}{R_S^3} \right]$$

folgt für das  $n$ te Massenelement

$$\begin{aligned} \Delta M_n &= \frac{4\pi}{3} \rho_S \left( \left( R_S - (n-1)\Delta r \right)^3 - \left( R_S - n\Delta r \right)^3 \right) \\ &= 4\pi\rho_S R_S^2 \Delta r \left[ 1 - 2 \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta r}{R_S} + \left( n(n-1) + \frac{1}{3} \right) \frac{\Delta r^2}{R_S^2} \right]. \end{aligned}$$

Näherungsweise gilt für kleine  $\Delta r$

$$\begin{aligned} \Delta M_n &\approx 4\pi\rho_S R_S^2 \Delta r \left[ 1 - 2n \frac{\Delta r}{R_S} + n(n-1) \frac{\Delta r^2}{R_S^2} \right] \\ &\approx 4\pi\rho_S R_S^2 \Delta r \left[ n^2 \frac{\Delta r^2}{R_S^2} - 2n \frac{\Delta r}{R_S} + 1 \right] = 4\pi\sigma_S R_S^2 \left( 1 - \frac{n\Delta r}{R_S} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Gesamtmasse  $M$  läßt sich somit als Summe über alle Hohlkugeln berechnen,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=0}^N \Delta M_n = 4\pi\sigma_S R_S^2 \sum_{n=0}^N \left( 1 - \frac{n\Delta r}{R_S} \right)^2 = 4\pi\sigma_S R_S^2 \left\{ N+1 - 2 \frac{\Delta r}{R_S} \sum_{n=1}^N n + \frac{\Delta r^2}{R_S^2} \sum_{n=1}^N n^2 \right\} \\ &= 4\pi\sigma_S R_S^2 \left\{ N+1 - 2 \frac{\Delta r}{R_S} \frac{(N+1)N}{2} + \frac{1}{6} \frac{\Delta r^2}{R_S^2} (2N+1)(N+1)N \right\} \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_S R_S^3 \frac{(2N+1)(N+1)}{2N^2} \approx \frac{4\pi}{3} \rho_S R_S^3, \end{aligned}$$

wobei wir davon ausgehen, daß aufgrund des Protonenzerfalls irgendwann das ganze Universum zerstrahlt sein wird. Dann ist  $\Delta M = M$  und mit

$$\Delta M = \frac{4\pi}{3} \cdot 2,694 \cdot 10^{-25} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4,46^3 \cdot 10^{75} \text{ m}^3 = 10^{53} \text{ kg}$$

## Physikaufgabe 125

---

folgt der außerhalb jeglicher Vorstellungskraft liegende Wert für die Zeitfluktuation des Vakuums

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{2Mc^2} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}}{2 \cdot 10^{53} \text{ kg} \cdot 2,998^2 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 5,86 \cdot 10^{-105} \text{ s.}$$

Entsprechend groß sind die Energiefluktuationen,

$$\Delta E = \Delta Mc^2 = 10^{53} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 9 \cdot 10^{69} \text{ J.}$$

Was hier fluktuiert, ist allerdings nicht das Vakuum, sondern es sind die Produktzustände des Wirkungsquantums, welches, und sei es auch noch so klein, als Produktzustand zweier Observablen konstant ist. Man kann diese Fluktuationen aber nicht als statistisch unabhängig betrachten, sondern muß sie wegen der Heisenbergschen Unschärferelation als gekoppelt ansehen. Vakuumfluktuationen breiten sich nämlich nicht mit Lichtgeschwindigkeit aus, sondern sind eine Instabilität des Raums an sich, die mutmaßlich mit verschränkten quantenmechanischen Zuständen einhergeht. Wann immer eine der beiden Größen gegen Null geht, wird kinetische Energie, also Materie in Form von Ruheenergie, in masselose potentielle Energie sprich Strahlung umgewandelt. Ähnlich wie ein Magnet sich schlagartig umpolt, wird sich auch das All irgendwann nach Ablauf seiner Lebensdauer umpolen, d.h. neu entstehen, denn Materie und Antimaterie sind zyklisch vertauschbar. Anscheinend nehmen die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Nähe der Singularität chaotische Verhaltensweisen an. Die Weltlinien gehen auf jeden Fall durch diese Singularität hindurch und tauchen im reziproken Raum wieder auf. Wegen der CPT-Invarianz läuft die Zeit im reziproken Raum allerdings rückwärts.

Eine Wirkung  $W$  stellt somit eine Abbildung

$$W : \mathbb{R}_E \otimes \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}$$

dar, die jedem Tupel von Vakuumfluktuationen  $(\Delta E, \Delta t) \in \mathbb{R}_E \otimes \mathbb{R}_t$  eine Wirkung  $\hbar \in \mathbb{R}$  so zuordnet, daß für  $(\Delta E, \Delta t) \mapsto \hbar$  gilt:  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ . Insbesondere sind dabei die Tupel  $(0, \infty)$  und  $(\infty, 0)$  als Lösungen ausgeschlossen. Damit ist der Zyklus des Weltalls vollständig beschrieben und ein Beweis seiner Unendlichkeit.