Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Berechnen Sie die Größe des Alls nach einem Gravitationskollaps oberhalb der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze.[1]

Lösung: Wenn sich das All im bewegten Bezugssystem mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ausdehnt, ist die Geschwindigkeit im Inertialsystem gemäß[2]

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \begin{cases} c & \text{für} \quad v = 0, \\ 0 & \text{für} \quad v = c \end{cases}$$

auf null abgesunken. Dabei ist $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ die Geschwindigkeit des aufgrund der Lorentzkontraktion flachen Universums im System der Singularität und v die Geschwindigkeit des bewegten Systems.[3] Wir interessieren uns speziell für den Zustand des Universums zu Beginn seiner Ausdehnung mit $v = 0$ bzw. $|\mathbf{v}| = c.$ Man beachte, daß die Wahl des Symbols v ausgesprochen unglücklich ist, weil $v \neq |\mathbf{v}|.$ Es ist nämlich v die Geschwindigkeit des Koordinatennullpunkts des bewegten relativ zum nichtbewegten Bezugssystem. Erreicht das bewegte Bezugssystem, also die Welt, in der wir leben, Lichtgeschwindigkeit, ist das All im nichtbewegten Inertialsystem in einer Singularität verschwunden. Das beantwortet die Frage, ob das All sich ausdehnt oder zusammenzieht. Im Inertialsystem zieht es sich jedenfalls zusammen, auch wenn wir in unserem bewegten System den Eindruck haben, es würde immer weiter expandieren. Es kommt also ganz auf den Standpunkt des Beobachters an, der die Betrachtung anstellt.

Im Unterschied dazu verschwindet das All im System der Singularität in einem fusionierten Schwarzen Loch.[4] Das muß so sein, weil die Entstehung eines supermassereichen Schwarzen Lochs, welches einschließlich der dunklen Energie einen viel größeren Schwarzschildradius hat als nur den durch die sichtbare Materie verursachten,[5] zu einem Gravitationskollaps mit extrem kurzwelligerer Gammastrahlung führt und damit zu einem Urknall. Nur so wird dem All aus Energie- und Drehimpulserhaltungsgründen ein Neubeginn ermöglicht. Man beachte ferner, daß die klassische Energieerhaltung $E = T + V$ nur im Falle niedriger Relativgeschwindigkeiten gilt. Dann und nur dann können wir nämlich in der Einsteinschen Energie-Masse-Äquivalenz die Näherung

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{M_0^2 c^4 + M^2 v^2 c^2} = M_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{1 - v^2/c^2}} \\ &\approx M_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = M_0 c^2 + \frac{1}{2} M_0 v^2 \end{aligned}$$

---

[1] Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze ist eine obere Schranke für die Masse von Neutronensternen. Oberhalb der Grenze kollabiert das Objekt direkt zu einem Schwarzen Loch.
[2] Aufgabe [123]
[3] z.B. unserer Galaxis
[4] dessen Radius wir hier berechnen
[5] den wir hier berechnen

anbringen, wobei $T = M_0 v^2/2$ die kinetische und $V = M_0 c^2$ die potentielle Energie des Alls ist, mit M_0 als Ruhemasse. Multipliziert man das Potential ϕ mit der Masse M_0, so erhält man die potentielle Energie des Alls $V = M_0\phi$ aus dem Differential

$$dV = -F(r)\,dr = \phi(r)\,dM_0.$$

Im Fall einer homogenen Kugel mit einer vom Radius *r* abhängigen Ruhemasse

$$M_0(r) = \rho\frac{4\pi}{3}r^3,$$

einem abstoßenden Potential

$$\phi(r) = \frac{GM_0(r)}{r}$$

und einer Kraft

$$F = -\frac{d}{dr}\phi(r) = \frac{GM_0(r)}{r^2}$$

ist die potentielle Energie nach Summation aller Kugelschalen der Dicke dM_0 gegeben durch

$$V = -\int_0^{R_S} F(r)\,dr = \int_0^{M_0}\phi\,dM_0.$$

Die potentielle Energie ist positiv und hat damit den Charakter einer negativen Bindungsenergie. Setzen wir die Ruhemasse in das Potential ein, erhalten wir unter Annahme einer konstanten Dichte ρ das Gravitationspotential am Ort *r*,

$$\phi(r) = \frac{G}{r}\rho\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}\rho G r^2.$$

Mit der Massenverteilung der homogen belegten Kugelschale

$$dM_0 = \rho A\,dr = 4\pi\rho r^2\,dr$$

liefert die Integration über sämtliche Sphären zwischen 0 und Schwarzschildradius R_S die potentielle Energie einer homogenen Vollkugel,

$$V = \int_0^{M_0}\phi\,dM_0 = \frac{16\pi^2\rho^2 G}{3}\int_0^{R_S} r^4\,dr = \left(\rho\frac{4\pi}{3}R_S^3\right)^2\frac{3G}{5R_S} = \frac{3GM_0^2}{5R_S}.$$

Durch Gleichsetzen mit $V = M_0 c^2$ können wir die so erhaltene Gleichung nach dem Schwarzschildradius auflösen,

$$R_S = \frac{3}{5}\frac{GM_0}{c^2}.$$

Mit der derzeit sichtbaren Masse ergibt sich ein Zahlenwert von

$$R_S = \frac{3}{5}\frac{6,674\cdot 10^{-11}\cdot 10^{53}\ \text{kg}}{2,998^2\cdot 10^{16}\ \text{m}^2\text{s}^{-2}}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2} = 4,46\cdot 10^{25}\ \text{m} = 4,71\cdot 10^9\ \text{Lj.}$$

Das wären bei einer Gesamtausdehnung des sichtbaren Alls von 13,8 Milliarden Lichtjahren gerade einmal 34 % seiner derzeitigen Größe. Damit der Schwarzschildradius das gesamte Weltall einschließen kann, muß angenommen werden, daß die Ruhemasse ursprünglich dreimal größer war. Davon könnte ein Teil unsichtbar sein, ein weiterer durch Protonenzerfall in dunkle Energie übergegangen sein.

