Aufgabe: Zeigen Sie, daß die vierte Dimension der Allgemeinen Relativitätstheorie lediglich der Wirkung einer Scheinkraft in einem beschleunigten Bezugssystem zuzuschreiben ist.

Beweis: Das Weltall dehnt sich beschleunigt aus, und in einem beschleunigten Bezugssystem treten Scheinkräfte auf. Insbesondere ist ein geradlinig beschleunigtes Bezugssystem einem Inertialsystem gleichgestellt. Für die im beschleunigten Bezugssystem gemessene Beschleunigung $\mathbf{a}$ gilt demnach

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_S,$$

wobei $\mathbf{F}$ die Gravitationskraft ist und $\mathbf{a}_S$ die Beschleunigung des Ursprungs des beschleunigten Systems[1] im System der Singularität.[2] Dividieren wir durch die Masse m des Universums,[3] besteht zwischen den Beschleunigungen im bewegten und im ruhenden System die Relation

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{a}_S.$$

Für kleine Beschleunigungen $\mathbf{a} \approx \mathbf{a}_S$ führt ein Quadrieren dieser Gleichung[4] zu dem Ausdruck

$$a^2 \equiv \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{F}^2}{m^2} - 2\frac{\mathbf{F}}{m}\mathbf{a}_S + \mathbf{a}_S^2 \approx \frac{\mathbf{F}^2}{m^2} - 2\mathbf{a}_S^2 + \mathbf{a}_S^2 = \frac{\mathbf{F}^2}{m^2} - \mathbf{a}_S^2,$$

d.h.

$$a^2 = \frac{F^2}{m^2} - \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right).$$

Mit den Definitionen

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{1}{m^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 - \left[\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2\right].$$

Nach Multiplikation mit dem quadratischen Zeitelement ergibt sich das differentielle Geschwindigkeitselement

---

[1] z.B. unserer Galaxis

[2] Die Singularität ist ein gedachter Punkt im Zentrum einer Kugelsphäre, von dem alle Raum-Zeit-Punkte gleich weit entfernt sind.

[3] Diese Masse nehmen wir als gleichmäßig auf der Oberfläche einer infinitesimal dünnen Kugelschale um den Mittelpunkt der Singularität verteilt an.

[4] wie beim Virialsatz

$$dv^2 = \frac{dp^2}{m^2} - \left(dv_x^2 + dv_y^2 + dv_z^2\right).$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit dem Quadrat der Masse, erhalten wir das differentielle Impulselement,

$$dp^2 = \frac{dE^2}{c^2} - \left(dp_x^2 + dp_y^2 + dp_z^2\right),$$

und nach Division durch das Quadrat der differentiellen Masse die Gleichung

$$\left(\frac{dp}{dm}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dm}\right)^2 - \left[\left(\frac{dp_x}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dp_y}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dp_z}{dm}\right)^2\right].$$

Dieses wandeln wir mittels $p = mv$, $p_x = mv_x$ usw. und $E = mc^2$ um in

$$v^2 = c^2 - \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right).$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit dem Quadrat der Zeit multiplizieren, erhalten wir das differentielle Wegelement

$$s^2 = c^2 t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Setzen wir andererseits die Definitionen

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

in den obigen Ausdruck ein, so folgt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

und nach Multiplikation mit dem quadratischen Zeitelement das differentielle Wegelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

Anhand der Beziehung

$$\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

erhalten wir im Inertialsystem der Singularität die Lösungen

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \begin{cases} c & \text{für} \quad v = 0, \\ 0 & \text{für} \quad v = c. \end{cases}$$

Das All dehnt sich also im Inertialsystem zunächst mit Lichtgeschwindigkeit aus, während es im beschleunigten Bezugssystem noch keine Geschwindigkeit besitzt. Kommt die Geschwindigkeit am Ende der Ausdehnung des Alls zum Erliegen, bewegt sich das mitbewegte System mit Lichtgeschwindigkeit.

Die Annahme Einsteins von einer vierten Dimension ist also nicht gerechtfertigt, da sich eine besser einleuchtende Erklärung aus der Existenz von Scheinkräften ergibt. Zudem sind die infinitesimalen Weg- und Impulselemente in der Regel klein oder sie verschwinden ganz.

Einstein konnte nämlich noch nicht wissen, daß sich das All beschleunigt ausdehnt.[5] Also war ihm die Existenz von Scheinkräften auch nicht bewußt. Seine vierte Dimension ist daher eher ein Formalismus als Realität

qed

[5] Der Nobelpreis für Physik 2011 wurde geteilt, eine Hälfte ging an Saul Perlmutter, die andere Hälfte gemeinsam an Brian P. Schmidt und Adam G. Riess „für die Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums durch die Beobachtung entfernter Supernovae."

