Aufgabe: Berechnen Sie die Lebensdauer des Protons und das maximal erreichbare Alters des Universums.

Lösung: Bekanntlich ist das Proton ein stabiles Teilchen mit einer Halbwertszeit, die größer ist als das Alter des sichtbaren Universums.[1] Sämtliche Galaxien rings um uns bewegen sich von uns weg, und das um so schneller, je weiter sie von uns entfernt sind.[2] In einer naiven Betrachtungsweise legt das die Schlußfolgerung nahe, daß sich unsere Galaxis irgendwo in der Nähe des Zentrums des Alls befindet und bisher kaum Geschwindigkeit aufgenommen hat, doch diese Annahme täuscht. Beobachter der anderen Galaxien sehen uns nämlich mit derselben Geschwindigkeit v davoneilen, wie umgekehrt wir sie von uns wegfliegen sehen. Daher können wir nur argumentieren, daß das All gar kein Zentrum besitzt, sondern jeder Punkt Mittelpunkt ist.[3] Mit dem relativistischen Impuls

$$\mathbf{p} = m_p \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

folgt aus der Einsteinschen Energie-Impuls-Beziehung

$$E = m_p c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

die energetische Unschärfe

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_p \Delta v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^3}.$$

Um den Punkt $v = 0$ ist $\Delta v = v_0$ und die minimale Unschärfe ist

$$\Delta E_0 = \frac{1}{2} m_p v_0^2.$$

Die Energievarianz kurz nach dem Urknall entspricht also der kinetischen Energie des Alls, die im Idealfall für $v_0 \to 0$ gegen Null geht, da sich das All anfangs noch nicht bewegt. Umgekehrt liegt die Zeitunschärfe des Protons kurz nach dem Urknall in der Nähe von unendlich,[4]

$$\Delta t_0 = \frac{\hbar}{m_p v_0^2} \to \infty,$$

d.h. das Proton hat unmittelbar nach dem Urknall eine nahezu unendliche Lebensdauer. Breitet sich hingegen das All aus, nimmt seine Geschwindigkeit zu und die Lebensdauer der Protonen

[1] Siehe Zitat am Ende dieser Aufgabe
[2] Die derzeit fernste Galaxie GN-z11 entfernt sich mit 98,64 Prozent der Lichtgeschwindigkeit.
[3] Stellen wir uns das All als eine zweidimensionale Ballonoberfläche vor. Diese hat bekanntlich keinen Mittelpunkt. Für jeden Punkt der Oberfläche gilt das gleiche, und der vierdimensionale Raum ist nur die Erweiterung einer Fläche auf den gekrümmten Raum.
[4] Den genauen Wert werden wir später berechnen.

nimmt ab. Wir nehmen aus Gründen der Einfachheit vorübergehend an, daß Energie und Zeit dieselbe physikalische Einheit besitzen.

Sei nun Δt die Zeitvarianz und ΔE die Energievarianz des Alls in Ausbreitungsrichtung. Durch Subtraktion der algebraischen Gleichungen $\left(\Delta t + \Delta E\right)^2 = \Delta t^2 \pm 2\Delta t\Delta E + \Delta E^2$ erhalten wir die gemischten Terme[5]

$$\Delta t\Delta E = \frac{1}{4}\left(\Delta t + \Delta E\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\Delta t - \Delta E\right)^2.$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta t\Delta E \geq \hbar/2$ folgt hieraus unter Verwendung des Gleichheitszeichens

$$\Delta t\Delta E = \frac{1}{4}\left(\Delta t + \Delta E\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\Delta t - \Delta E\right)^2 = \frac{\hbar}{2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Einheitshyperbel mit gleichlangen Halbachsen $\sqrt{2\hbar}$,

$$\frac{\left(\Delta t + \dfrac{\hbar}{2\Delta t}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2} - \frac{\left(\Delta E - \dfrac{\hbar}{2\Delta E}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2} = 1.$$

Um auf identische Einheiten zu kommen, formen wir unter Zuhilfenahme der Unschärferelation wie folgt um:

$$\frac{\left(\Delta t + \dfrac{\hbar}{2\Delta t}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2} - \frac{\left(\Delta t - \dfrac{\hbar}{2\Delta t}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2} = 1.$$

Für ΔE gilt eine entsprechende Gleichung. Energie und Zeit verhalten sich also beide hyperbolisch. Somit lauten die Lösungen der Einheitshyperbeln als Funktionen der Geschwindigkeit

$$\Delta t = -\frac{\hbar}{2\Delta t} + \sqrt{2\hbar}\cosh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta t} + \sqrt{2\hbar}\sinh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$\Delta E = -\frac{\hbar}{2\Delta E} + \sqrt{2\hbar}\cosh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta E} + \sqrt{2\hbar}\sinh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Wandeln wir diese Ausdrücke nachfolgend in quadratische Gleichungen um,

$$\Delta t^2 - 2\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Delta t\cosh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\hbar}{2} = 0, \qquad \Delta t^2 - 2\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Delta t\sinh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\hbar}{2} = 0,$$
$$\Delta E^2 - 2\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Delta E\cosh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\hbar}{2} = 0, \quad \Delta E^2 - 2\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\Delta E\sinh\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\hbar}{2} = 0,$$

[5] Wir vernachlässigen im Augenblick den Umstand, daß Ort und Impuls nicht die gleiche Dimension besitzen.

dann gibt es sowohl reelle als auch komplexe Lösungen. Die reellen Lösungen lauten

$$\Delta E=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\pm\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$

$$\Delta E=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\pm\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=-\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$

für Δt gilt Analoges. Die komplexen Lösungen sind gegeben durch

$$\Delta E=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\pm i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$

$$\Delta E=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\pm i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$

für Δt gilt Analoges. Da die reellen Lösungen zu negativen Produkten führen, verbleiben nur die komplexen Lösungen zur Auswahl. Es ergeben sich somit die inversen und zueinander konjugiert-komplexen Unschärfen

$$\Delta E=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \Delta t=i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

In betragsmäßiger Schreibweise und für $v\geq v_0$ gilt nach Normierung der Amplituden

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_p v_0^2\exp\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\right)$$

bzw.

$$\Delta t=\frac{\hbar}{m_p v_0^2}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}\right).$$

Wir finden somit bestätigt, daß $\Delta t\Delta E=\hbar/2$. Grenzwerte für $v_0\to 0$ sind

$$\lim_{v_0\to 0}\Delta E=\frac{1}{2}m_p\lim_{v_0\to 0}v_0^2=0\quad\text{und}\quad\lim_{v_0\to 0}\Delta t=\frac{\hbar}{m_p v_0^2}\lim_{v_0\to 0}\frac{1}{v_0^2}\to\infty.$$

Die unendliche Lebensdauer ist der Grund, warum das Proton nicht zerfällt, solange das Universum nicht größer ist als eine Singularität. Galaxien, die wir heute so sehen, wie sie vor 13,8 Milliarden Jahren ausgesehen haben,[6] gibt es möglicherweise schon gar nicht mehr, weil ihre Protonen teilweise zerstrahlt oder in Schwarzen Löchern verschwunden sind.

[6] Dabei gehen wir davon aus, daß der Raum lichtartig ist.

Es erweist sich als zweckmäßig, gemäß der Transformation aus der Speziellen Relativitätstheorie,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{v^2}{c^2}=\frac{\frac{a^2t^2}{c^2}}{1+\frac{a^2t^2}{c^2}},$$

die Darstellung

$$\Delta E=\Delta E_0 \exp\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}\right), \quad \Delta t=\Delta t_0 \exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}\right)$$

zu verwenden. Wir erkennen daran, daß die Varianzen des Protons in Energie und Zeit zum Zeitpunkt des Urknalls t_0 die Werte

$$\Delta E_0=\frac{1}{2}\frac{m_p a^2 t_0^2}{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}\approx\frac{1}{2}m_p a^2 t_0^2, \quad \Delta t_0=\frac{\hbar}{m_p a^2 t_0^2}\left(1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}\right)\approx\frac{\hbar}{m_p a^2 t_0^2}$$

besaßen. Für diesen Fall können wir noch die Näherung für kleine Zeiten verwenden,

$$\Delta E=\Delta E_0 \exp\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\left(t^2-t_0^2\right)\right], \quad \Delta t=\Delta t_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\left(t^2-t_0^2\right)\right].$$

Wie man sieht, sind die Varianzen um den Zeitpunkt des Urknalls gaußverteilt, wenn man t_0 gegen Null gehen läßt.

Bei der Paarvernichtung, d.h. der Reaktion eines Teilchens mit dem zugehörigen Antiteilchen, entstehen (allein oder neben anderen möglichen Reaktionsprodukten) auch Photonen, deren Energien im Bereich der Gammastrahlung liegen. Das Gammaquant des Protonenzerfalls trägt die Energie, die der Masse des Protons entspricht, abzüglich einer eventuellen Bindungsenergie und zuzüglich vorhandener Bewegungsenergien. Mit den Werten für die derzeit höchsten bekannten Energien $E=10^{20}\ \text{eV}=10^{11}\ \text{GeV}$ und einer Ruheenergie von $E_0=0{,}938\,\text{GeV}$ ergibt sich eine Geschwindigkeit, die bereits sehr dicht an der Lichtgeschwindigkeit liegt,

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^2=\frac{10^{24}-44}{10^{24}}=0{,}999999999999999999999956,$$

d.h. die kosmische Gammastrahlung, die hauptsächlich durch Protonen verursacht wird, rührt wohl daher, daß seit der Entstehung des Alls bereits sehr viele Protonen zerfallen sind. Diese Strahlung stammt aus den Anfängen des Universums. Wegen $v_0+v=c$ folgt

$$\frac{v_0}{c}=\frac{c-v}{c}=1-\frac{v}{c}=44\cdot 10^{-24}$$

und daraus

$$v_0 = 4,4 \cdot 10^{-23} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,32 \cdot 10^{-14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bzw.

$$t_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{1,32 \cdot 10^{-14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,26 \cdot 10^{-9} \ \text{ms}^{-2}} = 3,096 \cdot 10^{-6} \ \text{s}.$$

Unter der Annahme, daß das Proton zum Zeitpunkt des Urknalls eine Zeitunschärfe besaß, die weit über dem heutigen Alter T des Universums lag, folgt aus

$$\Delta t_0 = \frac{\hbar}{m_p v_0^2} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34} \ \text{Js}}{1,672 \cdot 10^{-27} \ \text{kg} \cdot 1,32^2 \cdot 10^{-28} \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 3,62 \cdot 3,17 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{20} \ \text{a} = 11,48 \cdot 10^{12} \ \text{a}$$

und $a = 4,26 \cdot 10^{-9} \ \text{ms}^{-2}$ wieder[7] der Wert für

$$t_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_p a^2 \Delta t_0}} = \sqrt{\frac{1,055 \cdot 10^{-34} \ \text{Js}}{1,672 \cdot 10^{-27} \ \text{kg} \cdot 4,26^2 \cdot 10^{-18} \ \text{m}^2\text{s}^{-4} \cdot 11,48 \cdot 10^{12} \cdot 3,154 \cdot 10^7 \ \text{s}}}$$

von $3,098 \, \mu\text{s}$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit von

$$v_0 = at_0 = 4,26 \cdot 10^{-9} \ \text{ms}^{-2} \cdot 3,098 \cdot 10^{-6} \ \text{s} = 1,32 \cdot 10^{-14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Als anfängliches Geschwindigkeitsverhältnis ergibt sich nach dem oben Gesagten

$$\frac{v_0}{c} = \frac{1,32 \cdot 10^{-14} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2,998 \cdot 10^8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 44 \cdot 10^{-24}.$$

Anhand dieser Größe können wir auch die unvorstellbar geringe Energieunschärfe unmittelbar nach dem Urknall angeben,

$$\Delta E_0 = \frac{1}{2} m_p v_0^2 = 0,5 \cdot 1,672 \cdot 10^{-27} \ \text{kg} \cdot 1,32^2 \cdot 10^{-28} \ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1,46 \cdot 10^{-55} \ \text{J} = 9,09 \cdot 10^{-37} \ \text{eV},$$

wobei die entsprechende Frequenzbandbreite auch noch kleiner gewesen sein könnte als

$$\Delta \nu_0 = \frac{\Delta E_0}{h} = \frac{1,46 \cdot 10^{-55} \ \text{J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \ \text{Js}} = 2,2 \cdot 10^{-22} \ \text{Hz}.$$

[7] Siehe Aufgabe [120]

Der Kehrwert der Frequenzbandbreite, die Bandbreite der Wellenlänge $\Delta\lambda_0$, übertrifft den offiziellen Wert[8] von 46,6 Milliarden Lichtjahren um mehr als zwei Größenordnungen. Sofern man nämlich die Ausdehnung des Alls als Materiewelle betrachtet, ist

$$\Delta\lambda_0 = \frac{c}{4\pi\Delta\nu_0} = \frac{2{,}998\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\pi\cdot 2{,}2\cdot 10^{-22}\ \text{Hz}} = \frac{2{,}998\cdot 10^{14}\cdot 1{,}057}{4\pi\cdot 2{,}2}\ \text{Lj} = 11{,}47\cdot 10^{12}\ \text{Lj}.$$

Dieser Rechengang entspricht

$$\Delta\lambda_0 = c\Delta t_0 = 2{,}998\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 11{,}47\cdot 10^{12}\cdot 3{,}154\cdot 10^7\ \text{s}\cdot 1{,}057\cdot 10^{-16}\ \text{Lj} = 11{,}47\cdot 10^{12}\ \text{Lj},$$

woraus im Umkehrschluß wieder das maximal erreichbare Alter des Universums folgt:

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta\lambda_0}{c} = \frac{1}{4\pi\Delta\nu_0} = \frac{3{,}17\cdot 10^{-8}}{4\pi\cdot 2{,}2\cdot 10^{-22}}\ \text{a} \approx 11{,}47\cdot 10^{12}\ \text{a}.$$

Am Anfang war also nur Ruhemasse vorhanden, und diese änderte sich über längere Zeiträume kaum. Erst als das Weltall eine Geschwindigkeit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit erreichte, nahm die Energie der Protonen drastisch zu und ihre Lebensdauer entsprechend ab. Diejenigen unter ihnen, die aus den fernsten Galaxien stammen, zeigen sich derzeit noch äußerst stabil. Wenn jedoch ihre Halbwertszeit $t_{1/2}$ abgelaufen ist, werden sie in weniger als einem Weltalter zerfallen, aber dies hängt natürlich von der absoluten Größe ihrer Halbwertszeit ab.

Unsere Erde bewegt sich innerhalb des Sonnensystems zusammen mit der gesamten Galaxis nahezu mit Lichtgeschwindigkeit, allerdings mit einer unvorstellbar geringen Beschleunigung, die vom „Zentrum“ des Universums wegführt. Demnach gilt für bewegte Protonen vom anderen Ende des Alls aufgrund der Zeitdilatation die Eigenzeit

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

relativ zum Inertialsystem der Singularität. Das Zerfallsgesetz

$$N(\tau) = N_0 e^{-\frac{\tau}{\Delta\tau}}$$

ist lorentzinvariant, d.h. es besitzt im bewegten System die gleiche Zeitabhängigkeit wie im Inertialsystem,

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\Delta t}} = N_0 e^{-\frac{t}{e\Delta t_0}\exp\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}.$$

Für $N(t_{1/2}) = N_0/2$ gilt demnach

[8] Das Licht durchläuft im All eine geschlossene Bahn, daher kann man nicht einfach einen euklidischen Raum annehmen.

$$\frac{1}{2}=e^{-\frac{t_{1/2}}{e\Delta t_0}\exp\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t_0=\frac{t_{1/2}}{e\ln 2}\exp\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}},$$

woraus sich das Zerfallsgesetz der Protonen ableitet

$$N(t)=N_0\exp\left[-\ln 2\frac{t}{t_{1/2}}\exp\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}\right)\right],$$

mit einer exponentiellen Abnahme der Zeitunschärfe

$$\Delta t=e\Delta t_0\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right)=\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}\right).$$

Das mag als Nachweis gelten, daß der Raum irgendwann in einer Singularität verschwinden wird, denn wenn die Zeitunschärfe klein wird (siehe Abb. 1), verschwindet auch die Raumunschärfe.

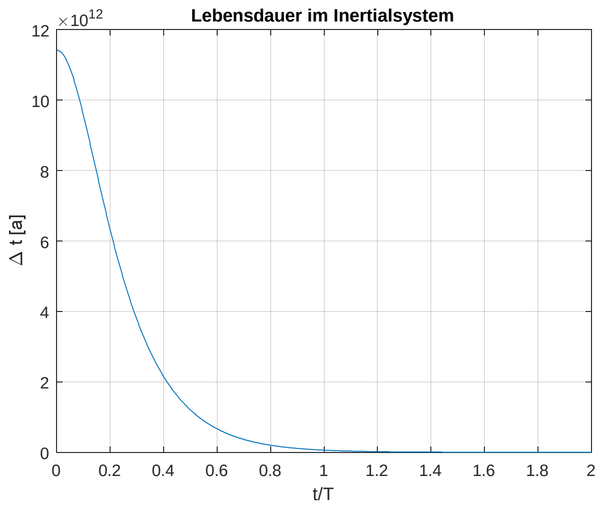

Abbildung 1. Lebensdauer des Protons im System der Singularität

Wir berechnen nun die Halbwertszeit des Protons nach der Regel $1/2=\exp\left(-t_{1/2}/\Delta t_{1/2}\right)$ durch Lösung der Gleichung

$$t_{1/2}=\Delta t_{1/2}\ln 2=\Delta t_0\ln 2\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2t_0^2}{c^2}}\right)\approx e\Delta t_0\ln 2\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}\right).$$

Mit $\Delta t_0=\hbar/\left(m_pv_0^2\right)$ formen wir den impliziten Ausdruck unter Verwendung bereits bekannter Größen entsprechend um,

$$\frac{\hbar\ln 2^e}{m_pv_0^2t_{1/2}}=\exp\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}\frac{t_{1/2}^2}{T^2}},$$

und wenden darauf ein Newton-Verfahren an. Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{t_{1/2}}{T}, \quad n = \frac{\hbar}{m_p v_0^2 T}, \quad \alpha = n \ln 2^e, \quad \beta = \frac{a^2 T^2}{c^2}$$

vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\alpha}{x} = \exp\sqrt{1+\beta x^2}.$$

Sie wird im Anhang numerisch gelöst. Als Startwert für das Newtonverfahren verwenden wir den näherungsweisen Ausdruck

$$x_0 = \frac{1}{e\alpha\beta}\left(\sqrt{1+2e^2\alpha^2\beta}-1\right).$$

Mit $\ln 2^e = 1{,}884$ und $aT/c = 6{,}187$ ergibt sich

$$\alpha = \frac{1{,}055\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\cdot 1{,}884}{1{,}672\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\cdot 1{,}32^2\cdot 10^{-28}\ \dfrac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\cdot 13{,}97\cdot 3{,}154\cdot 10^{16}\ \mathrm{s}} = 1548{,}6.$$

Da wir zur weiteren Vereinfachung den Term

$$x_0 = \frac{1}{e\alpha\beta}\left(\sqrt{1+2e^2\alpha^2\beta}-1\right) \approx \sqrt{\frac{2}{\beta}} = \frac{1{,}414}{6{,}187} = 0{,}2286$$

verwenden können, benötigen wir α zur Angabe des Startwerts nicht. Die Iteration liefert eine Halbwertszeit des Protons von

$$\frac{t_{1/2}}{T} = 1{,}1521 \quad \text{bzw.} \quad t_{1/2} = 16{,}095\cdot 10^9\ \mathrm{a},$$

die größer ist als das derzeitige Alter des Universums.

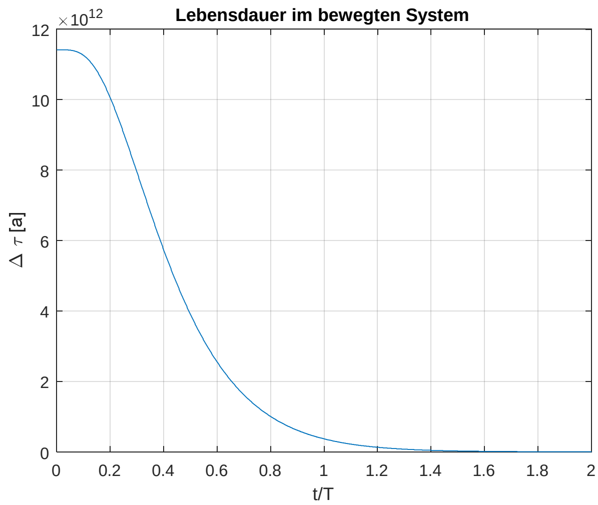

Abbildung 2. Lebensdauer des Protons im bewegten Bezugssystem der Erde

Die Halbwertszeit im bewegten System, also auf der Erde, ist noch um einen Faktor 7 länger,

$$\tau_{1/2}=\frac{t_{1/2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\approx t_{1/2}\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}\frac{t_{1/2}^2}{T^2}}=t_{1/2}\sqrt{1+\left(6{,}187\cdot 1{,}1529\right)^2}\approx 115{,}93\cdot 10^9\ \text{a},$$

und entspricht in etwa dem 8,4fachen Alters des Universums. Auch was die Lebensdauer des Protons

$$\Delta\tau=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2t_{1/2}^2}{c^2}}\right)$$

anbelangt, ist diese im bewegten System gegenwärtig, d.h. zur Zeit $t=T$, mehr als 26mal so groß wie das Universum alt ist (siehe Abb. 2),

$$\begin{aligned}\Delta\tau&=\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}}\exp\left(-\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}}+\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}\frac{t_{1/2}^2}{T^2}}\right)\\&=\frac{16{,}095\cdot 10^9\ \text{a}}{\ln 2}\sqrt{1+6{,}187^2}\exp\left(-\sqrt{1+6{,}187^2}+\sqrt{1+6{,}187^2\cdot 1{,}1521^2}\right)\\&=369\cdot 10^9\ \text{a}.\end{aligned}$$

Nach Ablauf der Halbwertszeit, die nur etwas größer ist als das Alter des Universums, beträgt die Lebensdauer immer noch

$$\Delta\tau=\frac{t_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}\frac{t_{1/2}^2}{T^2}}=\frac{16{,}095\cdot 10^9\ \text{a}}{0{,}693}\sqrt{1+6{,}187^2\cdot 1{,}1521^2}=167\cdot 10^9\ \text{a}.$$

Am Ende der Zeit, d.h. nach ca. 11,5 Billionen Jahren, hat das Weltall etwa das 817fache seines derzeitigen Alters erreicht,

$$\frac{\Delta t_0}{T}=\frac{11{,}47\cdot 10^{12}\ \text{a}}{13{,}97\cdot 10^9\ \text{a}}=817.$$

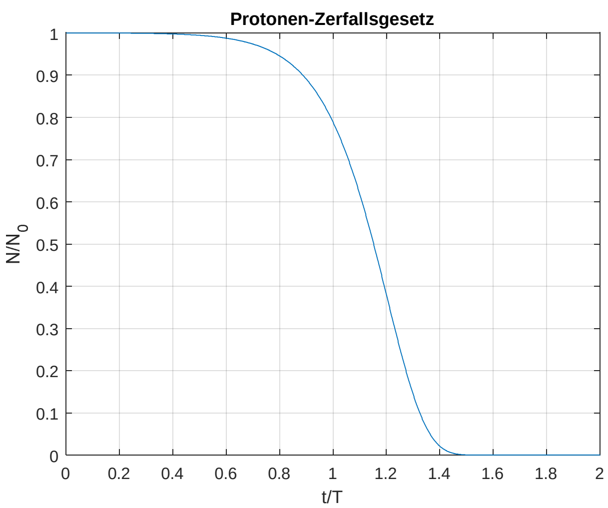

Abbildung 3. Nichtexponentielle Abnahme des Protonenzerfalls

Mit der Näherung für große Zeiten,

$$\Delta\tau \approx \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\frac{aT}{c}\frac{\Delta t_0}{T}\exp\left[-\frac{aT}{c}\left(\frac{\Delta t_0}{T}-\frac{t_{1/2}}{T}\right)\right],$$

hat das Proton die verschwindende Lebensdauer

$$\Delta\tau \approx \frac{16,095\cdot 10^9\ \mathrm{a}}{0,693}\cdot 5,055\cdot 10^3\cdot 1,246\cdot 10^3\cdot 2,096\cdot 10^{-46}\cdot 256\cdot 10^{-2152} = 2,47\cdot 10^{-2171}\ \mathrm{s}$$

erreicht, d.h. es ist restlos zerstrahlt. Es ist also um so kurzlebiger, je höher das aktuelle Alter des Universums ist. Zum Zeitpunkt des Urknalls (man beachte, daß $\Delta\tau_0 = \Delta t_0$) betrug seine Lebensdauer noch sagenhafte 11,4 Billionen Jahre. Heute ist sie auf etwa 3,2 % dieses Wertes zusammengeschrumpft. Das Weltall steckt aber immer noch in den Kinderschuhen. Erreicht es hingegen sein maximales Alter, wird kaum noch ein Proton anzutreffen sein, wie aus Abb. 3 ersichtlich, denn der Protonenzerfall dürfte nach dieser Theorie in den nächsten 6-7 Milliarden Jahren drastisch zunehmen. Gegenwärtig sind etwa 20 % aller ursprünglich vorhandenen Protonen bereits zerfallen, in den nächsten 2 Milliarden Jahren werden es weitere 30 % sein.

Ein hohes Alter in voller Schönheit wird das All mit Sicherheit nicht erreichen. Da bisher noch kein einziger Protonenzerfall nachgewiesen werden konnte, liegt die Vermutung nahe, daß die erforderlichen kinetischen Energien in den Beschleunigern nicht erreicht werden konnten. Die heute größte Synchrotronanlage Large Hadron Collider konnte Protonen bis auf 6,5 TeV beschleunigen. $1\,\mathrm{TeV}$ entspricht $10^3\,\mathrm{GeV}$. Das wird kaum hinreichen, um den Urknall mit $10^{11}\,\mathrm{GeV}$ zu simulieren, denn es fehlen ganze 7 Größenordnungen an Energie.

Während also die Energie exponentiell zunimmt, je stärker die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Alls sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, nimmt seine Lebensdauer exponentiell ab, bis irgendwann so viele Protonen zerfallen sind, daß sich die komplette Materie in Strahlung aufgelöst hat. Würde das Proton nämlich nicht zerfallen, gäbe es keine dunkle Energie, denn durch den Protonenzerfall verschwindet ja die Energie nicht, sie geht nur in eine andere Form über. Dunkle Materie ist also Materie, die nicht mehr da ist, jedenfalls nicht in ihrer ursprünglichen Form. Ein ewig währendes Universum muß uns hingegen unnatürlich erscheinen.

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist. (Carl Friedrich Gauß)

Anhang

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} - \exp\sqrt{1+\beta x^2} = 0,$$

deren Ableitungen gegeben sind durch

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta x}{\sqrt{1+\beta x^2}} e^{\sqrt{1+\beta x^2}}$$

und

$$f''(x) = \frac{2\alpha}{x^3} - \frac{\beta\left(1+\beta x^2\sqrt{1+\beta x^2}\right)}{\sqrt{1+\beta x^2}^3} e^{\sqrt{1+\beta x^2}}.$$

Der Nullstelle können wir uns rekursiv durch die Folge

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

annähern. Den Startwert x_0 finden wir wie folgt: Nach Gleichsetzen der rechten und der linken Seite der Funktion *f* und entsprechender Umformung finden wir mit Hilfe der binomischen Näherung den Ausdruck

$$\frac{x}{\alpha} = e^{-\sqrt{1+\beta x^2}} = e^{-\left(1+\frac{1}{2}\beta x^2\right)} = e^{-1} e^{-\frac{1}{2}\beta x^2}.$$

Mittels der Näherung der Exponentialfunktion für kleine Argumente kommen wir zu einer lösbaren quadratischen Gleichung,

$$x^2 + \frac{2x}{e\alpha\beta} - \frac{2}{\beta} = 0,$$

deren Lösungen gegeben sind durch

$$x = -\frac{1}{e\alpha\beta} \pm \frac{1}{e\alpha\beta}\sqrt{1+2e^2\alpha^2\beta}.$$

Mit dem positiven Vorzeichen erhalten wir einen brauchbaren Startwert

$$x_0 = \frac{1}{e\alpha\beta}\left(\sqrt{1+2e^2\alpha^2\beta} - 1\right).$$

Das Nullstellenverfahren zur Bestimmung der Halbwertszeiten wurde mit dem beigefügten MATLAB-Programm ausgeführt.


```
% Programm teinhalb
% Lebensdauer des Protons durch Newtonverfahren
clear all
n = 822;
% Alter des Universums in Jahren
T = 13.96e+9;

a = n*exp(1)*log(2);
b = 6.187^2;
x(1) = 1/exp(1)/a/b*(sqrt(1+2*exp(1)^2*a^2*b)-1);
X = 'x(0) = ';
disp(X)
disp(x(1))
m = 100;
for i = 1:m
    f(i) = a/x(i)-exp(sqrt(1+b*x(i)^2));
    fp(i) = -a/x(i)^2-b*x(i)/sqrt(1+b*x(i)^2)*exp(sqrt(1+b*x(i)^2));
    x(i+1) = x(i)-f(i)/fp(i);
end
xm = x(m+1);
X = 'x(m) = ';
disp(X)
disp(xm)
t12 = xm*T;
X = 't12 = ';
disp(X)
disp(t12)
tau = xm*T*sqrt(1+b*xm^2);
X = 'tau = ';
disp(X)
disp(tau)


>> teinhalb

x(0) = 0.2286

x(m) = 1.1529

t12 = 1.6095e+10

tau = 1.1593e+11


% Programm Deltat
% Berechnet die Lebensdauer des Protons
clear all

% Beschleunigung des Alls relativ
a = 6.187;

% Heutiges Alter des Universums in Jahren
T = 13.97e+9;

% Halbwertszeit des Protons in Jahren
t12 = 16.095e+9;

% Relative Halbwertszeit in Relation zum Alter des Universums
b = t12/T

m = 2001;
```



```
for i = 1:m
    t(i) = (i-1)*2*b/(m-1);
    Deltat(i) = t12/log(2)*exp(-sqrt(1+a^2*t(i)^2)+sqrt(1+a^2*b^2));
    Deltatau(i) = Deltat(i)*sqrt(1+a^2*t(i)^2);
    N(i) = exp(-t(i)*log(2)/b*exp(sqrt(1+a^2*t(i)^2)-sqrt(1+a^2*b^2)));
end

Deltatau_0 = t12/log(2)*exp(-1+sqrt(1+a^2*b^2))
n = Deltatau_0/T
Deltatau_1 = t12/log(2)*sqrt(1+a^2)*exp(-sqrt(1+a^2)+sqrt(1+a^2*b^2))
Deltatau_12 = t12/log(2)*sqrt(1+a^2*b^2)
Deltatau_fin = t12/log(2)*sqrt(1+a^2*821^2)*exp(-
sqrt(1+a^2*821^2)+sqrt(1+a^2*b^2))

figure(1)
plot(t,Deltat)
grid on
xlabel ('t/T');
ylabel('\Delta t [a]');
title('Lebensdauer im Inertialsystem');
xlim([0 2])

figure(2)
plot(t,Deltatau)
grid on
xlabel ('t/T');
ylabel('\Delta \tau [a]');
title('Lebensdauer im bewegten System');
xlim([0 2])

figure(3)
plot(t,N)
grid on
xlabel ('t/T');
ylabel('N/N_0');
title('Protonen-Zerfallsgesetz');
xlim([0 2])
ylim([0 1])

>> lebensdauer

b = 1.1521

Deltatau_0 = 1.1418e+13

n = 817.3172

Deltatau_1 = 3.6907e+11

Deltatau_12 = 1.6714e+11

Deltatau_fin = 0
```

