Aufgabe: Berechnen Sie anhand eines eindimensionalen Modells die Ausdehnung des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums als Funktion des Massezuwachses und zeigen Sie, daß der Raum hyperbolisch ist. Erläutern Sie ferner die Begriffe dunkle Energie und „dunkle Zeit“.

Lösung: Sei Δx die Ortsvarianz und Δp die Impulsvarianz des Alls in Ausbreitungsrichtung. Durch Subtraktion der algebraischen Gleichungen

$$\left(\Delta x+\Delta p\right)^2=\Delta x^2+2\Delta x\Delta p+\Delta p^2,$$
$$\left(\Delta x-\Delta p\right)^2=\Delta x^2-2\Delta x\Delta p+\Delta p^2$$

erhalten wir die gemischten Terme zu[1]

$$\Delta x\Delta p=\frac{1}{4}\left(\Delta x+\Delta p\right)^2-\frac{1}{4}\left(\Delta x-\Delta p\right)^2.$$

Aus der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x\Delta p\geq\hbar/2$ und unter Verwendung des Gleichheitszeichens folgt hieraus

$$\Delta x\Delta p=\frac{1}{4}\left(\Delta x+\Delta p\right)^2-\frac{1}{4}\left(\Delta x-\Delta p\right)^2=\frac{\hbar}{2}.$$

Dies ist die Gleichung einer Einheitshyperbel mit gleich langen Halbachsen $\sqrt{2\hbar}$,

$$\frac{\left(\Delta x+\dfrac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2}-\frac{\left(\Delta p-\dfrac{\hbar}{2\Delta p}\right)^2}{\sqrt{2\hbar}^2}=1.$$

Der Raum ist also hyperbolisch. Die Lösungen dieser Einheitshyperbel als Funktion der Geschwindigkeit v lauten

$$\Delta x=-\frac{\hbar}{2\Delta x}+\sqrt{2\hbar}\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$
$$\Delta p=\frac{\hbar}{2\Delta p}+\sqrt{2\hbar}\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

wobei wir die Einsteinsche Massenzunahme wegen der beschleunigten Ausdehnung des Alls mit Hilfe der aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannten Relation

$$\frac{v}{c}=\tanh\left(\operatorname{arsinh}\frac{at}{c}\right)$$

[1] Wir vernachlässigen im Augenblick den Umstand, daß Ort und Impuls nicht die gleiche Dimension besitzen.

auch als Funktion der Zeit schreiben können:

$$\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\left(\operatorname{arsinh}\frac{at}{c}\right)}}=\cosh\left(\operatorname{arsinh}\frac{at}{c}\right)$$
$$=\sqrt{1+\sinh^2\left(\operatorname{arsinh}\frac{at}{c}\right)}=\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}.$$

Dabei sind m_0 die Ruhemasse und a die Beschleunigung des Alls sowie c die Lichtgeschwindigkeit. Wir wandeln diese Lösungen wie folgt in quadratische Gleichungen um,

$$\Delta x^2-2\Delta x\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cosh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{\hbar}{2}=0,$$
$$\Delta p^2-2\Delta p\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sinh\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-\frac{\hbar}{2}=0.$$

Deren Lösungen wiederum sind gegeben durch

$$\Delta x=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\cosh\frac{m}{m_0}\pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}\left(\cosh^2\frac{m}{m_0}-1\right)}=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\cosh\frac{m}{m_0}\pm\sinh\frac{m}{m_0}\right),$$
$$\Delta p=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\sinh\frac{m}{m_0}\pm\sqrt{\frac{\hbar}{2}\left(\sinh^2\frac{m}{m_0}+1\right)}=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\sinh\frac{m}{m_0}\pm\cosh\frac{m}{m_0}\right).$$

Dabei wählen wir das Vorzeichen für Δx positiv, für Δp negativ:

$$\Delta x=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\cosh\frac{m}{m_0}+\sinh\frac{m}{m_0}\right)=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}e^{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}},$$
$$i\Delta p=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\cosh\frac{m}{m_0}-\sinh\frac{m}{m_0}\right)=-i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}e^{-\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}$$

und finden bestätigt, daß

$$i\Delta x\Delta p=-i\frac{\hbar}{2}\left(\cosh\frac{m}{m_0}+\sinh\frac{m}{m_0}\right)\left(\cosh\frac{m}{m_0}-\sinh\frac{m}{m_0}\right)$$
$$=-i\frac{\hbar}{2}\left(\cosh^2\frac{m}{m_0}-\sinh^2\frac{m}{m_0}\right)=-i\frac{\hbar}{2}.$$

Da die Unschärfe wegen des imaginären Impulses eine komplexe Zahl ist, bilden wir das Betragsquadrat

$$\left|\Delta x \Delta p\right|^2 = i\Delta x \Delta p \cdot \left(-i\Delta x \Delta p\right) = -i^2 \frac{\hbar^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Wir sehen also, daß der Raum aus der Singularität heraus exponentiell zu-, während der Impulsraum exponentiell abnimmt. Da sich durch diese Abnahme des Impulses Werte ergeben würden, die kleiner sind als das Plancksche Wirkungsquantum,[2] verlagern wir das Problem in den reziproken Raum, damit Ort und Impuls dort entweder zu- oder abnehmen können; denn nur so können zwei annähernd gleich große Werte in der Differenz 1 ergeben. In diesem reziproken Raum gilt stets das Umgekehrte wie in unserem gewöhnlichen sichtbaren Raum. Man kann davon ausgehen, daß dort der Protonenzerfall

$$p \to e^+ + \pi^0,\ \pi^0 \to 2\gamma$$

entsprechend schnell stattfindet und alle Materie zerstrahlt. Je nachdem, welches Bezugssystem man betrachtet, kann man es natürlich auch genau andersherum sehen und den Raum in einer Singularität verschwinden lassen, wobei die Masse dann kontinuierlich zunimmt. Wichtig ist, daß das Produkt aus Raumzeit und Impulsenergie als Wirkung stets erhalten bleibt.

Die Raumzeit des gewöhnlichen vierdimensionalen Raums und der reziproke Impuls des reziproken Raums sowie die Impulsenergie des gewöhnlichen Raums und die Raumzeit des reziproken Impulsraums stellen ebenfalls Hyperbeln mit gleichen Halbachsen $\sqrt{2\hbar}$ dar:

$$\frac{\Delta x^2}{\sqrt{2\hbar}^2} - \frac{1}{\sqrt{2\hbar}^2}\frac{\hbar^2}{4\Delta p^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{2\hbar}^2}\frac{\hbar^2}{4\Delta x^2} - \frac{\Delta p^2}{\sqrt{2\hbar}^2} = 1.$$

Dabei sind die Reziprokwerte dunkle Energie bzw. dunkle Zeit, die der Realität verborgen bleiben.

Alle Betrachtungen können selbstverständlich auf alle Raum- und Impulsachsen ausgedehnt werden. Das bleibt dem Leser als Übung überlassen.

[2] Was unseres Erachtens nicht sein kann

