

Physikaufgabe 118

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe des Bohrschen Atommodells, daß im Heliumatom das dritte Keplersche Gesetz gilt.

Lösung: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen. Ist die Ellipse ein Kreis, verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben ihrer Radien. Wir zeigen dies am Beispiel des Heliumatoms für den Fall, daß die beiden Elektronen die Orbitale n und $n+1$ besetzen, d.h. für mindestens einen angeregten Zustand. Besetzen beide Elektronen das gleiche Orbital, sind sie nicht unterscheidbar. Das hat u.a. zur Konsequenz, daß die gleichzeitige Messung von Ort und Impuls eines Elektrons keinem der beiden Elektronen zugeordnet werden kann. Wir wissen jedoch, daß sich zwei Elektronen gemäß dem Pauli-Prinzip in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden müssen, beispielsweise im Spin.

Die Umlaufzeiten der beiden Elektronen im Heliumatom seien gegeben durch

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi R_n}{v_n}.$$

Mit den Radien und Geschwindigkeiten zweier „Bahnen“

$$R_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad \text{und} \quad v_n = \frac{n\hbar}{mR_n}$$

ergeben sich für die Quantenzahlen n und $n+1$ die Quotienten

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{v_{n+1} T_{n+1}}{v_n T_n} = \frac{n+1}{n} \frac{R_n T_{n+1}}{R_{n+1} T_n}$$

bzw.

$$\frac{R_{n+1}^2}{R_n^2} = \frac{n+1}{n} \frac{T_{n+1}}{T_n}.$$

Das können wir nochmals quadrieren,

$$\frac{R_{n+1}^4}{R_n^4} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2},$$

und mit den Substitutionen

$$(n+1)^2 = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} R_{n+1} \quad \text{und} \quad n^2 = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} R_n$$

bzw. deren Quotienten

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{R_{n+1}}{R_n},$$

auf die Form

Physikaufgabe 118

$$\frac{R_{n+1}^4}{R_n^4} = \frac{R_{n+1}}{R_n} \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2}$$

bringen, so daß sich nach Kürzen der Radien das dritte Keplersche Gesetz für das Heliumatom ergibt, wonach sich die dritten Potenzen zweier Bahnradien wie die Quadrate ihrer Umlaufzeiten verhalten,

$$\frac{R_{n+1}^3}{R_n^3} = \frac{T_{n+1}^2}{T_n^2},$$

qed