Aufgabe: Beweisen Sie, daß ein Elektron, das gerade noch gebunden ist und damit nur einen Umkehrpunkt hat, keine Bahngeschwindigkeit haben kann.

Beweis: Nach dem Virialsatz, der gleichbedeutend ist mit dem Kräftegleichgewicht auf der Kreisbahn, halten sich Coulombkraft und Zentrifugalkraft die Waage,

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\omega^2 r = \frac{mv^2}{r}.$$

Dabei ist *r* der Radius, *m* die Masse und *v* die Geschwindigkeit des Elektrons, *e* seine Elementarladung und ε_0 die Dielektrizitätskonstante. Mit

$$E_{pot} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad \text{und} \quad E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

folgt die Relation $-E_{pot} = 2E_{kin}$. Nach dem Energieerhaltungssatz der klassischen Mechanik verschwindet bekanntlich die Gesamtenergie auf der Kreisbahn, wenn das Teilchen gerade noch gebunden ist, d.h.

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = 0.$$

Formen wir den Virialsatz entsprechend um, d.h. $2E_{kin} + E_{pot} = E_{kin} + E = 0,$ dann folgt wegen $E = 0$ auch $E_{kin} = 0$ bzw. $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = 0.$ Trennen wir die Variablen,

$$\frac{dr}{r} = i d\varphi$$

so ist wegen $\ln r = \ln A + i\varphi,$ wobei *A* eine beliebige Phasenkonstante ist, der Radius eine ebene Welle, $r = Ae^{i\varphi}$. Setzen wir diesen Ausdruck zusammen mit seiner Ableitung $\dot{r} = i\dot{\varphi}Ae^{i\varphi}$ in das Geschwindigkeitsquadrat ein, sieht man sofort, daß ein einfrierendes quantenmechanisches Teilchen in eine Welle übergeht,

qed

