Home | Startseite | Impressum | Kontakt | Gästebuch

Aufgabe: Zeigen Sie, daß Raumzeit und Impulsenergie aufgrund des Postulats der dunklen Energie gleichwertig und ineinander konvertierbar sind, und leiten Sie die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Quantenmechanik her.

Beweis: Betrachten wir die beiden Vierervektoren von Raum und Impuls, $\mathbf{s}$ und $\mathbf{p}$, dann sind deren Kreuzprodukte, die Drehimpulse $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{s} \times \hat{\mathbf{p}}$ und $-\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{p} \times \hat{\mathbf{s}}$ ebenfalls Vierervektoren. Mit

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} ic^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

gilt, da der achtdimensionale Raum in sich geschlossen ist, die Drehimpulserhaltung

$$\hat{\mathbf{L}} - \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{s} \times \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \times \hat{\mathbf{s}} = 0.$$

Wir verwenden in Erweiterung des dreidimensionalen Raums für das Kreuzprodukt zweier Vierervektoren die auf den vierdimensionalen Raum übertragene zyklische Definition

$$\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{p}} \equiv \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (ic)^{-1}\hat{E} \\ \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\hat{p}_y - y\hat{p}_x \\ y\hat{p}_z - z\hat{p}_y \\ zic^{-1}\hat{E} - ict\hat{p}_z \\ ict\hat{p}_x - xic^{-1}\hat{E} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{p}_x y - \hat{p}_y x \\ \hat{p}_y z - \hat{p}_z y \\ \hat{p}_z ict - (ic)^{-1}\hat{E}z \\ (ic)^{-1}\hat{E}x - \hat{p}_x ict \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} ic^{-1}\hat{E} \\ \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{s}.$$

Im vierdimensionalen Ortsraum ist der Impulsoperator ein Differentialoperator,

$$\frac{\hat{E}}{c} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial ct}, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}.$$

Alle Operatoren ergeben zusammen die komplexe Wellengleichung

$$\hat{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{c^2}\hat{E}\hat{E}^* + \hat{p}_x\hat{p}_x^* + \hat{p}_y\hat{p}_y^* + \hat{p}_z\hat{p}_z^* = \hbar^2\left(-\frac{\partial}{\partial ict^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

und die Drehimpulse kann man übersichtlicher als Kommutatoren schreiben:

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{s}\times\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -xi\hbar\dfrac{\partial}{\partial y} + yi\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -yi\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} + zi\hbar\dfrac{\partial}{\partial y} \\ -zi\hbar\dfrac{\partial}{\partial ict} + icti\hbar\dfrac{\partial}{\partial z} \\ -icti\hbar\dfrac{\partial}{\partial x} + xi\hbar\dfrac{\partial}{\partial ict} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[x,\, \hat{p}_y\right] \\ \left[y,\, \hat{p}_z\right] \\ \left[z, (ic)^{-1}\hat{E}\right] \\ \left[ict,\, \hat{p}_x\right] \end{pmatrix}.$$

Im reziproken Raum, dem Impulsraum, liegen die Verhältnisse anders. Dort gilt nämlich

$$\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{s}} \equiv \begin{pmatrix} (ic)^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ic\hat{t} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x\hat{y} - p_y\hat{x} \\ p_y\hat{z} - p_z\hat{y} \\ p_z ic\hat{t} - (ic)^{-1}E\hat{z} \\ (ic)^{-1}E\hat{x} - p_x ic\hat{t} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{x}p_y - \hat{y}p_x \\ \hat{y}p_z - \hat{z}p_y \\ \hat{z}(ic)^{-1}E - ic\hat{t}p_z \\ ic\hat{t}p_x - \hat{x}(ic)^{-1}E \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} ic\hat{t} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (ic)^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = -\hat{\mathbf{s}}\times\mathbf{p},$$

und dort ist der Ortsoperator ein Differentialoperator,

$$c\hat{t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial c^{-1}E}, \quad \hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}, \quad \hat{y} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y}, \quad \hat{z} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_z},$$

und es gilt die reziproke Wellengleichung

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = c^2\hat{t}\hat{t}^* + \hat{x}\hat{x}^* + \hat{y}\hat{y}^* + \hat{z}\hat{z}^* = \hbar^2\left(-(ic)^2\frac{\partial^2}{\partial E^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_z^2}\right).$$

Für den reziproken Drehimpuls gelten wieder die Kommutatoren

$$-\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{p}\times\hat{\mathbf{s}} = \begin{pmatrix} p_x i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_y} - p_y i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_x} \\ p_y i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_z} - p_z i\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_y} \\ p_z i\hbar\dfrac{\partial}{\partial (ic)^{-1}E} - c^{-1}Ei\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_z} \\ (ic)^{-1}Ei\hbar\dfrac{\partial}{\partial p_x} - p_x i\hbar\dfrac{\partial}{\partial (ic)^{-1}E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[p_x,\, \hat{y}\right] \\ \left[p_y,\, \hat{z}\right] \\ \left[p_z,\, ic\hat{t}\right] \\ \left[(ic)^{-1}E,\, \hat{x}\right] \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für die Summe beider Drehimpulse nach dem Drehimpulserhaltungssatz

$$\mathbf{s}\times\hat{\mathbf{p}}+\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{s}}=\begin{pmatrix}\left[x,\,\hat{p}_y\right]\\ \left[y,\,\hat{p}_z\right]\\ \left[z,c^{-1}\hat{E}\right]\\ \left[ict,\,\hat{p}_x\right]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left[p_x,\hat{y}\right]\\ \left[p_y,\hat{z}\right]\\ \left[p_z,ic\hat{t}\right]\\ \left[(ic)^{-1}E,\hat{x}\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left[x,\,\hat{p}_y\right]\\ \left[y,\,\hat{p}_z\right]\\ \left[z,(ic)^{-1}\hat{E}\right]\\ \left[ict,\,\hat{p}_x\right]\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\left[\hat{x},\,p_y\right]\\ \left[\hat{y},\,p_z\right]\\ \left[\hat{z},(ic)^{-1}E\right]\\ \left[ic\hat{t},\,p_x\right]\end{pmatrix}=0.$$

Der Drehimpulserhaltungssatz läßt sich also in Kommutatornotation wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}\left[x,\,\hat{p}_y\right]&=\left[\hat{x},\,p_y\right],\\ \left[y,\,\hat{p}_z\right]&=\left[\hat{y},\,p_z\right],\\ \left[z,(ic)^{-1}\hat{E}\right]&=\left[\hat{z},(ic)^{-1}E\right],\\ \left[ict,\,\hat{p}_x\right]&=\left[ic\hat{t},\,p_x\right].\end{aligned}$$

Bisher galt

$$\begin{aligned}\left[x,\,\hat{p}_y\right]&=0,\\ \left[y,\,\hat{p}_z\right]&=0,\\ \left[z,(ic)^{-1}\hat{E}\right]&=0,\\ \left[ict,\,\hat{p}_x\right]&=0,\end{aligned}$$

weil man die dunkle Energie außer acht ließ. Energie und Zeit sind aber Ort und Impuls gleichwertig. Das folgt direkt aus den Unschärferelationen und aus der Symmetrie von Orts- und Impulsraum, von denen keiner dem anderen gegenüber bevorzugt ist. Wählt man für Ort und Impuls orthogonale Komponenten aus, so sind diese aufgrund fehlender Unschärfe auch gleichzeitig meßbar.

Den Drehimpulserhaltungssatz formen wir nun um zu

$$\begin{aligned}\frac{x\partial x-y\partial y}{\partial x\partial y}i\hbar\partial&=\frac{p_x\partial p_x-p_y\partial p_y}{\partial p_x\partial p_y}i\hbar\partial,\\ \frac{y\partial y-z\partial z}{\partial y\partial z}i\hbar\partial&=\frac{p_y\partial p_y-p_z\partial p_z}{\partial p_y\partial p_z}i\hbar\partial,\\ \frac{z\partial z-ict\partial ict}{\partial z\partial ict}i\hbar\partial&=\frac{p_z\partial p_z-i^{-1}c^{-1}E\partial i^{-1}c^{-1}E}{\partial p_z\partial i^{-1}c^{-1}E}i\hbar\partial,\\ \frac{ict\partial ict-x\partial x}{\partial x\partial ict}i\hbar\partial&=\frac{i^{-1}c^{-1}E\partial i^{-1}c^{-1}E-p_x\partial p_x}{\partial p_x\partial i^{-1}c^{-1}E}i\hbar\partial.\end{aligned}$$

Dann kürzen wir die überflüssigen Konstanten auf beiden Seiten und bringen die Nenner auf die andere Seite. Wir erhalten einfachere Gleichungen:

$$\begin{aligned}\left(x\partial x-y\partial y\right)\partial p_x\partial p_y&=\left(p_x\partial p_x-p_y\partial p_y\right)\partial x\partial y,\\ \left(y\partial y-z\partial z\right)\partial p_y\partial p_z&=\left(p_y\partial p_y-p_z\partial p_z\right)\partial y\partial z,\\ \left(z\partial z-ict\partial ict\right)\partial p_z\partial i^{-1}c^{-1}E&=\left(p_z\partial p_z-i^{-1}c^{-1}E\partial i^{-1}c^{-1}E\right)\partial z\partial ict,\\ \left(ict\partial ict-x\partial x\right)\partial p_x\partial i^{-1}c^{-1}E&=\left(i^{-1}c^{-1}E\partial i^{-1}c^{-1}E-p_x\partial p_x\right)\partial x\partial ict.\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke wandeln wir aus gutem Grunde nochmals um in

$$\begin{aligned}\left(x\partial p_y-p_x\partial y\right)\partial x\partial p_x&=\left(y\partial p_x-p_y\partial x\right)\partial p_y\partial y,\\ \left(y\partial p_z-p_y\partial z\right)\partial y\partial p_y&=\left(z\partial p_y-p_z\partial y\right)\partial z\partial p_z,\\ \left(z\partial i^{-1}c^{-1}E-p_z\partial ict\right)\partial z\partial p_z&=\left(ict\partial p_z-i^{-1}c^{-1}E\partial z\right)\partial E\partial t,\\ \left(ict\partial p_x-i^{-1}c^{-1}E\partial x\right)\partial E\partial t&=\left(x\partial i^{-1}c^{-1}E-p_x\partial ict\right)\partial p_x\partial x\end{aligned}$$

und kürzen auf beiden Seiten die Unschärferelationen

$$\partial x\partial p_x=\partial y\partial p_y=\partial z\partial p_z=\partial t\partial E\geq\frac{\hbar}{2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}x\partial p_y-p_x\partial y&=y\partial p_x-p_y\partial x,\\ y\partial p_z-p_y\partial z&=z\partial p_y-p_z\partial y,\\ z\partial i^{-1}c^{-1}E-p_z\partial ict&=ict\partial p_z-i^{-1}c^{-1}E\partial z,\\ ict\partial p_x-i^{-1}c^{-1}E\partial x&=x\partial i^{-1}c^{-1}E-p_x\partial ict.\end{aligned}$$

Nochmalige Umformung führt zur Trennung der Orts- und Impulsvariablen:

$$\begin{aligned}p_y dx-p_x dy&=ydp_x-xdp_y,\\ p_z dy-p_y dz&=zdp_y-ydp_z,\\ i^{-1}c^{-1}Edz-p_z dict&=ictdp_z-zdi^{-1}c^{-1}E,\\ p_x dict-i^{-1}c^{-1}Edx&=xdi^{-1}c^{-1}E-ictdp_x,\end{aligned}$$

wobei wir die partiellen Differentiale durch totale ersetzt haben. Quadrieren wir beide Seiten, erhalten wir symmetrische und asymmetrische Terme:

$$\begin{aligned}p_y^2dx^2-2p_xp_ydxdy+p_x^2dy^2&=y^2dp_x^2-2xydp_xdp_y+x^2dp_y^2,\\ p_z^2dy^2-2p_yp_zdydz+p_y^2dz^2&=z^2dp_y^2-2yzdp_zdp_y+y^2dp_z^2,\\ i^{-2}c^{-2}E^2dz^2-2p_zEdzdt+p_z^2i^2c^2dt^2&=i^2c^2t^2dp_z^2-2ztdEdp_z+z^2i^{-2}c^{-2}dE^2,\\ p_x^2i^2c^2dt^2-2Ep_xdtdx+i^{-2}c^{-2}E^2dx^2&=x^2i^{-2}c^{-2}dE^2-2txdp_xdE+i^2c^2t^2dp_x^2.\end{aligned}$$

Wir addieren nun die 4 Gleichungen und erhalten den Tensor

$$\left(p_y^2 + i^{-2}c^{-2}E^2\right)dx^2 - 2p_x p_y dxdy + \left(p_x^2 + p_z^2\right)dy^2 - 2p_y p_z dydz$$
$$+\left(p_y^2 + i^{-2}c^{-2}E^2\right)dz^2 - 2p_z Edzdt + \left(p_z^2 + p_x^2\right)i^2c^2dt^2 - 2Ep_x dtdx$$
$$=\left(y^2 + i^2c^2t^2\right)dp_x^2 - 2xydp_x dp_y + \left(x^2 + z^2\right)dp_y^2 - 2yzdp_y dp_z$$
$$+\left(y^2 + i^2c^2t^2\right)dp_z^2 - 2ztdp_z dE + \left(x^2 + z^2\right)i^{-2}c^{-2}dE^2 - 2txdEdp_x.$$

Da die quadratischen differentiellen Wegelemente für Ort und Impuls für lichtartige Ereignisse verschwinden,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2c^2dt^2 = 0, \quad dp_x^2 + dp_y^2 + dp_z^2 + \frac{dE^2}{i^2c^2} = 0,$$

nehmen die Gleichungen mit

$$y^2 + i^2c^2t^2 = -\left(x^2 + z^2\right), \quad p_y^2 + \frac{E^2}{i^2c^2} = -\left(p_x^2 + p_z^2\right)$$

folgende Form an:

$$-\left(p_x^2 + p_z^2\right)dx^2 - 2p_x p_y dxdy - \left(p_y^2 + \frac{E^2}{i^2c^2}\right)dy^2 - 2p_y p_z dydz,$$
$$-\left(p_x^2 + p_z^2\right)dz^2 - 2p_z Edzdt - \left(p_y^2 + \frac{E^2}{i^2c^2}\right)i^2c^2dt^2 - 2Ep_x dtdx,$$
$$= -\left(x^2 + z^2\right)dp_x^2 - 2xydp_x dp_y - \left(y^2 + i^2c^2t^2\right)dp_y^2 - 2yzdp_y dp_z,$$
$$-\left(x^2 + z^2\right)dp_z^2 - 2ztdp_z dE - \left(y^2 + i^2c^2t^2\right)i^{-2}c^{-2}dE^2 - 2txdEdp_x,$$

wobei wir noch von den verschwindenden Skalarprodukten der Vierervektoren Gebrauch gemacht haben:

$$\left(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{s}\right)^2 = E^2dt^2 + p_x^2dx^2 + p_y^2dy^2 + p_z^2dz^2 = 0,$$
$$\left(\mathbf{s}\cdot d\mathbf{p}\right)^2 = t^2dE^2 + x^2dp_x^2 + y^2dp_y^2 + z^2dp_z^2 = 0.$$

Ort und Impuls sind zueinander orthogonal. Das folgt aus der Tatsache, daß das totale Differential von $\hbar = \mathbf{s}\cdot\mathbf{p}$ verschwindet, und das ist nur möglich, wenn jeder Term in dem folgenden Ausdruck gleich null ist:

$$d\hbar^2 = \left(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{s} + \mathbf{s}\cdot d\mathbf{p}\right)^2 = \left(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{s}\right)^2 + 2\left(\mathbf{p}\cdot d\mathbf{s}\right)\left(\mathbf{s}\cdot d\mathbf{p}\right) + \left(\mathbf{s}\cdot d\mathbf{p}\right)^2 = 0.$$

Die Drehimpulsänderungen des achtdimensionalen Raums lassen sich ebenfalls als Vierervektoren darstellen und durch folgende Vektorgleichungen zusammenfassen:

$$\mathbf{s}\times d\hat{\mathbf{p}}=\begin{pmatrix} ict \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} (ic)^{-1}d\hat{E} \\ d\hat{p}_x \\ d\hat{p}_y \\ d\hat{p}_z \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} xd\hat{p}_y - yd\hat{p}_x \\ yd\hat{p}_z - zd\hat{p}_y \\ z(ic)^{-1}d\hat{E} - ictd\hat{p}_z \\ ictd\hat{p}_x - x(ic)^{-1}d\hat{E} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{p}\times d\hat{\mathbf{s}}=\begin{pmatrix} (ic)^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} icd\hat{t} \\ d\hat{x} \\ d\hat{y} \\ d\hat{z} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p_x d\hat{y} - p_y d\hat{x} \\ p_y d\hat{z} - p_z d\hat{y} \\ p_z icd\hat{t} - (ic)^{-1}Ed\hat{z} \\ (ic)^{-1}Ed\hat{x} - p_x icd\hat{t} \end{pmatrix},$$

d.h.

$$d\hat{\mathbf{L}} - d\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{s}\times d\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\times d\hat{\mathbf{s}} = 0$$

bzw. $\mathbf{s}\times d\hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{p}\times d\hat{\mathbf{s}},$ womit ersichtlich wird, daß sich das Drehmoment des sichtbaren Raums in den unsichtbaren reziproken Raum überträgt und die übertragene Energie als dunkle Energie immer noch präsent ist.

Wir gelangen nun zu den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, wenn wir zeigen können, daß

$$\left(p_z^2 dx^2 - z^2 dp_x^2\right) + \left(\frac{E^2}{i^2c^2}dy^2 - i^2c^2t^2dp_y^2\right) + \left(p_x^2 dz^2 - x^2 dp_z^2\right)$$
$$+\left(p_y^2 i^2c^2dt^2 - y^2 i^{-2}c^{-2}dE^2\right) = 0.$$

Wahlweise können wir auch schreiben:

$$\left(p_z x + zdp_x\right)\left(p_z x - zdp_x\right) + \left(\frac{E}{ic}dy + ictdp_y\right)\left(\frac{E}{ic}dy - ictdp_y\right)$$
$$+\left(p_x dz + xdp_z\right)\left(p_x dz - xdp_z\right) + \left(p_y icdt + y\frac{dE}{ic}\right)\left(p_y icdt - y\frac{dE}{ic}\right) = 0.$$

Das stimmt immer, da die Kommutatoren in den Ausdrücken

$$\left(p_z x + zdp_x\right)\left[p_z, x\right] + \left(\frac{E}{ic}dy + ictdp_y\right)\left[\frac{E}{ic}, dy\right]$$
$$+\left(p_x dz + xdp_z\right)\left[p_x, dz\right] + \left(p_y icdt + y\frac{dE}{ic}\right)\left[p_y, icdt\right] = 0$$

identisch verschwinden. Sie sind keine erlaubten Drehimpulse, was Einstein in seinen Gleichungen nicht berücksichtigt hat, da er die Quantentheorie rundum ablehnte. Wir formen entsprechend um und erhalten die Weltmetrik des achtdimensionalen Raums,

$$\begin{aligned} p_x^2dx^2 + 2p_xp_ydxdy + p_y^2dy^2 + 2p_yp_zdydz + p_z^2dz^2 + 2p_zEdzdt + E^2dt^2 \\ +2Ep_xdtdx = x^2dp_x^2 + 2xydp_xdp_y + y^2dp_y^2 + 2yzdp_ydp_z \\ +z^2dp_z^2 + 2ztdp_zdE + t^2dE^2 + 2txdEdp_x. \end{aligned}$$

Dabei gilt es zu bedenken, daß Orte und Impulse im jeweils inversen Raum Operatoren darstellen. Berücksichtigen wir das in den obigen Gleichungen, so ist jeweils eine Größe der jeweiligen Produkte durch ihre komplex-konjugierte zu ersetzen, d.h. mit den Betragsquadraten

$$\hat{p}_z\hat{p}_z^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial z}\right)^2, \quad p_x\hat{p}_y^* = \frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial y}, \quad \hat{E}\hat{E}^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial t}\right)^2, \quad \hat{p}_y\hat{p}_z^* = \frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial z},$$

$$\hat{p}_x\hat{p}_x^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial x}\right)^2, \quad \hat{p}_z\hat{E}^* = \frac{\partial\hbar}{\partial z}\frac{\partial\hbar}{\partial t}, \quad \hat{p}_y\hat{p}_y^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial y}\right)^2, \quad \hat{E}\hat{p}_x^* = \frac{\partial\hbar}{\partial t}\frac{\partial\hbar}{\partial x}$$

und

$$\hat{z}\hat{z}^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\right)^2, \quad \hat{x}\hat{y}^* = \frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}, \quad \hat{t}\hat{t}^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial E}\right)^2 \quad \hat{y}\hat{z}^* = \frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}$$

$$\hat{x}\hat{x}^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\right)^2, \quad \hat{z}\hat{t}^* = \frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\frac{\partial\hbar}{\partial E}, \quad \hat{y}\hat{y}^* = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\right)^2, \quad \hat{t}\hat{x}^* = \frac{\partial\hbar}{\partial E}\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}$$

ergeben sich die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie unter Einbeziehung des reziproken Raumes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\hbar}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial y}dxdy + \left(\frac{\partial\hbar}{\partial y}\right)^2 dy^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial z}dydz + \left(\frac{\partial\hbar}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial z}\frac{\partial\hbar}{\partial t}dzdt + \left(\frac{\partial\hbar}{\partial t}\right)^2 dt^2 \\ +2\frac{\partial\hbar}{\partial t}\frac{\partial\hbar}{\partial x}dtdx = \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\right)^2 dp_x^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}dp_xdp_y + \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\right)^2 dp_y^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}dp_ydp_z \\ +\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\right)^2 dp_z^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\frac{\partial\hbar}{\partial E}dp_zdE + \left(\frac{\partial\hbar}{\partial E}\right)^2 dE^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial E}\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}dEdp_x. \end{aligned}$$

Hierbei kann das Plancksche Wirkungsquantum durch jedes beliebige Produkt aus Ortskoordinate und Impuls ersetzt werden, weil die Größen des reziproken Raumes vor das Differentiationssymbol gezogen werden können. Setzen wir etwa

$$\hbar = \mathbf{s}\cdot\mathbf{p} = xp_x + yp_y + zp_z + tE,$$

dann sind die partiellen Ableitungen des Wirkungsquantums gegeben durch

$$\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}=x,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial p_y}=y,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial p_z}=z,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial E}=t,$$
$$\frac{\partial\hbar}{\partial x}=p_x,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial y}=p_y,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial z}=p_z,\quad \frac{\partial\hbar}{\partial t}=E.$$

Das totale Differential lautet folglich

$$d\hbar=\frac{\partial\hbar}{\partial x}dx+\frac{\partial\hbar}{\partial y}dy+\frac{\partial\hbar}{\partial z}dz+\frac{\partial\hbar}{\partial t}dt=\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}dp_x+\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}dp_y+\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}dp_z+\frac{\partial\hbar}{\partial E}dE$$

bzw.

$$d\hbar=p_xdx+p_ydy+p_zdz+Edt=xdp_x+ydp_y+zdp_z+tdE.$$

Quadrieren der linken Seite führt zu

$$\begin{aligned}d\hbar^2=&\left(\frac{\partial\hbar}{\partial x}\right)^2dx^2+2\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial y}dxdy+2\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial z}dxdz+\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial t}dxdt\\&+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial y}\right)^2dy^2+\frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial z}dydz+\frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial t}dzdt\\&+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial z}\right)^2dz^2+\frac{\partial\hbar}{\partial z}\frac{\partial\hbar}{\partial t}dzdt\\&+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial t}\right)^2dt^2,\end{aligned}$$

mit der Metrik

$$\begin{aligned}d\hbar^2=&\,g_{xx}dx^2+2g_{xy}dxdy+2g_{xz}dxdz+2g_{xct}dxdct\\&+g_{yy}dy^2+2g_{yz}dydz+2g_{yct}dydct\\&+g_{zz}dz^2+2g_{zct}dzdct\\&+g_{ctct}dct^2,\end{aligned}$$

wobei die Metrik im Ortsraum gegeben ist durch

$$g_{xx}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial x}\right)^2,\quad g_{xy}=\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial y},\quad g_{xz}=\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial z},\quad g_{xct}=\frac{1}{c}\frac{\partial\hbar}{\partial x}\frac{\partial\hbar}{\partial t},\quad g_{yy}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial y}\right)^2,$$
$$g_{yz}=\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z},\quad g_{yct}=\frac{1}{c}\frac{\partial\hbar}{\partial y}\frac{\partial\hbar}{\partial t},\quad g_{zz}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial z}\right)^2,\quad g_{zct}=\frac{1}{c}\frac{\partial\hbar}{\partial z}\frac{\partial\hbar}{\partial t},\quad g_{ctct}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\hbar}{\partial t}\right)^2.$$

In Matrixschreibweise fassen wir die nichtverschwindenden Beiträge elegant zusammen:

$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} & g_{xct} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} & g_{yct} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} & g_{zct} \\ g_{ctx} & g_{xx} & g_{xx} & g_{xx} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_x^2 & p_x p_y & 0 & p_x c^{-1}E \\ p_y p_x & p_y^2 & p_y p_z & 0 \\ 0 & p_z p_y & p_z^2 & p_z c^{-1}E \\ c^{-1}Ep_x & 0 & c^{-1}Ep_z & c^{-2}E^2 \end{pmatrix}.$$

Im reziproken Raum ist das quadratische Plancksche Wirkungsquantum definiert durch

$$\begin{aligned} d\hbar^2 =& \left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\right)^2 dp_x^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\, p_x p_y + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\, p_x p_z + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial E}\, p_x E \\ &+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\right)^2 dp_y^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\, p_y p_z + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial E}\, p_y E \\ &+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\right)^2 dp_z^2 + 2\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\frac{\partial\hbar}{\partial E}\, p_z E \\ &+\left(\frac{\partial\hbar}{\partial E}\right)^2 dE^2, \end{aligned}$$

mit der Metrik

$$\begin{aligned} d\hbar^2 = & g_{xx}^{-1}dp_x^2 + 2g_{xy}^{-1}p_x p_y + 2g_{xz}^{-1}p_x p_z + 2g_{xct}^{-1}dp_x dc^{-1}E \\ &+g_{yy}^{-1}dp_y^2 + 2g_{yz}^{-1}dp_y dp_z + 2g_{yct}^{-1}dp_y dc^{-1}E \\ &+g_{zz}^{-1}dp_z^2 + 2g_{zct}^{-1}dp_z dc^{-1}E \\ &+g_{ctct}^{-1}dc^{-2}E^2, \end{aligned}$$

die gegeben ist durch

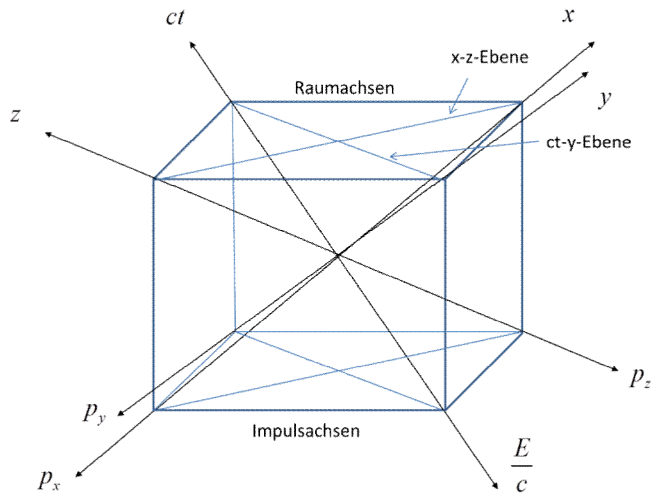
$$g_{xx}^{-1}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\right)^2,\quad g_{xy}^{-1}=\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_y},\quad g_{xz}^{-1}=\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z},\quad g_{xct}^{-1}=c\frac{\partial\hbar}{\partial p_x}\frac{\partial\hbar}{\partial E},\quad g_{yy}^{-1}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\right)^2,$$

$$g_{yz}^{-1}=\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial p_z},\quad g_{yct}^{-1}=c\frac{\partial\hbar}{\partial p_y}\frac{\partial\hbar}{\partial E},\quad g_{zz}^{-1}=\left(\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\right)^2,\quad g_{zct}^{-1}=c\frac{\partial\hbar}{\partial p_z}\frac{\partial\hbar}{\partial E},\quad g_{ctct}^{-1}=c^2\left(\frac{\partial\hbar}{\partial E}\right)^2.$$

In Matrixschreibweise verwenden wir wieder die Notation

$$\left(g_{ij}^{-1}\right)=\begin{pmatrix} g_{xx}^{-1} & g_{xy}^{-1} & g_{xz}^{-1} & g_{xct}^{-1} \\ g_{yx}^{-1} & g_{yy}^{-1} & g_{yz}^{-1} & g_{yct}^{-1} \\ g_{zx}^{-1} & g_{zy}^{-1} & g_{zz}^{-1} & g_{zct}^{-1} \\ g_{ctx}^{-1} & g_{cty}^{-1} & g_{ctz}^{-1} & g_{ctct}^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & xy & 0 & xct \\ yx & y^2 & yz & 0 \\ 0 & zy & z^2 & zct \\ ctx & 0 & ctz & c^2t^2 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen sind also sowohl im Orts- als auch im Impulsraum konsistent. Dabei ist der Raum definiert durch die partiellen Ableitungen des Planckschen Wirkungsquantums nach den Impulskoordinaten und der Impuls entsprechend durch die Ableitungen nach den Ortskoordinaten. Energie ist die Ableitung des Planckschen Wirkungsquantums nach der Zeit und Zeit seine Ableitung nach der Energie. Damit ist das Universum vollständig beschrieben. Anstelle der 40 Summanden der Allgemeinen Relativitätstheorie treten lediglich 10 auf, von denen 2 noch null sind. Allerdings haben wir die doppelte Anzahl wegen der Metrik des reziproken Raums. Es verbleiben wegen der Kopplung der Raumzeit an die Impulsenergie somit 16 Gleichungen mit 16 Unbekannten. Dieses System ist im Gegensatz zu den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie lösbar. Die folgende Abbildung zeigt anschaulich, warum es nicht möglich ist, Ort und Impuls eines quantenmechanischen Teilchens gleichzeitig zu messen, wenn dieses sich auf derselben Koordinatenachse bewegt.



Eine Drehimpulsänderung wirkt sich nämlich auf die komplementäre Größe des reziproken Raums aus. Wenn also die Zustände $\mathbf{s}$ und $\mathbf{p}$ beim Urknall festgelegt wurden, dann sind es aufgrund der Quantenverschränkung auch die Zustände $\hat{\mathbf{s}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$. Dafür gibt es bisher noch keine quantenmechanische Messung als Bestätigung,[1] wohl aber eine fundierte Begründung, denn wenn die Vektoren des vierdimensionalen Raums paarweise aufeinander senkrecht stehen, dann stehen sie auch in bezug auf den reziproken Raum aufeinander senkrecht, da beide Räume zusammen einen achtdimensionalen orthogonalen Raum ergeben müssen, sonst könnte die Weltgleichung[2] nicht hergeleitet werden

qed

[1] Weil die Messungen nicht bis zum Urknall zurückreichen
[2] Aufgabe [62]

