Aufgabe: Wie hängen Schubleistung und Reichweite eines Flugzeugs von seiner Masse und der mitgeführten Treibstoffmenge ab?

Lösung: Die Auftriebskraft F_A und Luftwiderstandskraft F_W eines Flugzeugs sind gegeben durch

$$F_A = \frac{1}{2} c_A \rho v^2 A \quad \text{und} \quad F_W = \frac{1}{2} c_W \rho v^2 A,$$

wobei c_A der Auftriebsbeiwert, c_W der Widerstandsbeiwert, v die Fluggeschwindigkeit, A die Auftriebsfläche und ρ die Luftdichte ist. Beide Kräfte werden kompensiert durch das Gewicht bzw. die Schubkraft des Flugzeugs

$$F_G = mg \quad \text{und} \quad F_S = \dot{m} v,$$

mit der Masse m, der Erdbeschleunigung g und der Massenänderung $\dot{m}$ der ausströmenden Luft. Letztere folgt aus der Konstanz des Impulses p gemäß

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v} + \dot{m}v = 0,$$

d.h. aus dem Newtonschen Gesetz $F_W + F_S = 0$. Die Beschleunigung der Luftmassen ist nach hinten gerichtet und trägt daher ein negatives Vorzeichen. Wegen $F_A = F_G$ und $F_W = F_S$ gilt also

$$F_G = \frac{1}{2} c_A \rho v^2 A \quad \text{bzw.} \quad F_S = \frac{1}{2} c_W \rho v^2 A.$$

Dividieren wir beide Gleichungen durcheinander, so stehen diese Kräfte in folgendem Verhältnis:

$$F_S = \frac{c_W}{c_A} F_G.$$

Die Schubleistung erhalten wir bei konstanter Geschwindigkeit gemäß der Definition

$$P = F_S v = \frac{c_W}{c_A} F_G v.$$

Ersetzen wir den Auftrieb in der Formel für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2F_A}{c_A \rho A}}$$

durch das Gewicht und setzen letztere in die obige Relation ein, so lautet die erforderliche Antriebsleistung

$$P = F_S v = \frac{c_W}{\sqrt{c_A}^3} \sqrt{\frac{2F_G^3}{\rho A}} = \frac{c_W}{\sqrt{c_A}^3} \sqrt{\frac{2m^3 g^3}{\rho A}},$$

d.h. die Schubleistung ist proportional zur dritten Potenz aus der Wurzel der Masse: $P \sim m^{3/2}$.

Zur Herleitung der Reichweite sei die infinitesimale Massenänderung des Flugzeugs infolge Kraftstoffverbrauchs pro Zeitintervall *dt* proportional zur Schubkraft:

$$\dot{m} = -\chi F_S,$$

wobei χ der spezifische Kraftstoffverbrauch ist, der üblicherweise in kg/kN/h angegeben wird. Die Auflösung dieses Ausdrucks nach der Zeit *t* liefert

$$dt = -\frac{dm}{\chi F_S}.$$

Um die Reichweite *R* zu berechnen, muß die infinitesimal zurückgelegte Flugstrecke ds durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit *v* bestimmt werden:

$$ds = v dt = -\frac{v dm}{\chi F_S}.$$

R berechnen wir dann durch Integration der Wegelemente wie folgt:

$$R = \int_0^R ds = -\frac{1}{\chi} \int_m^{m_0} \frac{v dm}{F_S}.$$

Dabei ist *m* die Masse des aufgetankten Flugzeugs beim Start einschließlich Nutzlast und m_0 die Masse bei der Landung nach Rückkehr ohne Treibstoff. Durch Substitution von

$$F_S = \frac{F_W}{F_A} F_G = \frac{c_W}{c_A} F_G$$

im Nenner des Integrals folgt in den Grenzen von *m* und m_0 der einfach zu integrierende Ausdruck

$$R = -\frac{1}{\chi} \frac{c_A}{c_W} \int_m^{m_0} \frac{v dm}{F_G},$$

in den wir nur noch die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2F_G}{c_A \rho A}}$$

einzusetzen brauchen, damit sich der elementare Ausdruck

$$R = -\frac{1}{\chi} \frac{\sqrt{c_A}}{c_W} \sqrt{\frac{2}{\rho A}} \int_m^{m_0} \frac{dm}{\sqrt{F_G}}$$

ergibt. Wenn wir nun noch die Gewichtskraft durch das Produkt aus Masse mal Beschleunigung ersetzen, erhalten wir ein einfach zu integrierendes Integral:

$$R = -\frac{1}{\chi c_W} \sqrt{\frac{2c_A}{\rho g A}} \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{\sqrt{m}}.$$

Die Stammfunktion in den angegebenen Grenzen lautet

$$R = \frac{2}{\chi c_W} \sqrt{\frac{2c_A}{\rho g A}} \left(\sqrt{m} - \sqrt{m_0} \right).$$

Nur wenn die mitgeführte Treibstoffmenge im Verhältnis zur Gesamtmasse klein ist, gilt näherungsweise

$$\sqrt{m} - \sqrt{m_0} = \sqrt{m_0 + m_f} - \sqrt{m_0} = \sqrt{m_0} \left(\sqrt{1 + \frac{m_f}{m_0}} - 1 \right)$$

$$\approx \sqrt{m_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_f}{m_0} - 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{m_f}{\sqrt{m_0}}.$$

Die Reichweite ist also direkt proportional zur mitgeführten Treibstoffmenge m_f und umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Gesamtmasse nach Abzug des verbrauchten Treibstoffs:

$$R = \frac{1}{\chi c_W} \sqrt{\frac{2c_A}{\rho A}} \frac{m_f}{\sqrt{m_0 g}} \sim m_f.$$

Für eine bestimmte Reichweite benötigt ein Flugzeug daher annähernd die folgende Treibstoffmasse:

$$m_f \approx \chi c_W R \sqrt{\frac{m_0 g \rho A}{2c_A}},$$

womit sich die Gesamtmasse m gemäß

$$m = m_0 + m_f = m_a + m_p + m_f$$

aus insgesamt drei Beiträgen zusammensetzt, der Masse m_a entsprechend dem Leergewicht des Flugzeugs, der Masse m_p entsprechend der Nutzlast und der Masse m_f entsprechend dem Gewicht des Treibstoffs.

Grundsätzlich ist es daher so, daß nicht die geforderte Reichweite die Flugleistung festlegt, sondern die verbrauchte Treibstoffmenge, die allerdings abhängig von der gewünschten Reichweite ist.

