**Aufgabe:** Erläutern Sie, warum sich die Zahl der Infizierten nach der jeweils doppelten Zeit ebenfalls verdoppelt.[1]

**Beweis:** Sei $N_B(t_1)$ die Zahl der Infizierten zum Zeitpunkt $t_1$. Dann ist $N_B(t_2)$ die Zahl der Infizierten zum Zeitpunkt $t_2$. Bei einer Verdopplung der Infektionszahl gilt demnach

$$\frac{N_B(t_2)}{N_B(t_1)} = 2.$$

Nun folgt die Zahl der Infizierten $N_B$ aber keinem Wachstumsgesetz mit natürlicher Reproduktionsrate, sondern einem Räuber-Beute-Formalismus der Form

$$\dot{N}_B(t) = k_I N_A(t),$$

mit den Lösungen

$$N_A(t) = N_0 e^{-k_I t} \quad \text{und} \quad N_B(t) = N_0 - N_A(t) = N_0\left(1 - e^{-k_I t}\right).$$

Dabei ist $N_0$ die anfängliche Gesamtzahl der Population, und nicht die Zahl der anfänglich Infizierten, und $k_I$ die Infektionsrate. Die Zahl der Infizierten ändert sich nämlich nicht proportional zur Zahl der bereits Infizierten, sondern proportional zur Zahl der noch nicht Infizierten. Demzufolge sind

$$N_B(t_1) = N_0\left(1 - e^{-k_I t_1}\right) \quad \text{und} \quad N_B(t_2) = N_0\left(1 - e^{-k_I t_2}\right)$$

die Zahlen der Infizierten zu den Zeiten $t_1$ und $t_2$. Ferner ist

$$k_I = \frac{1}{t_1} \ln \frac{N_0}{N_0 - N_B(t_1)} = \frac{1}{t_2} \ln \frac{N_0}{N_0 - N_B(t_2)}$$

die konstante Infektionsrate. Lösen wir diesen Ausdruck nach $t_2$ auf, so folgt

$$t_2 = t_1 \frac{\ln \dfrac{N_0}{N_0 - 2N_B(t_1)}}{\ln \dfrac{N_0}{N_0 - N_B(t_1)}} = \frac{1}{k_I} \ln \frac{e^{k_I t_1}}{2 - e^{k_I t_1}} = t_1 - \frac{1}{k_I} \ln\left(2 - e^{k_I t_1}\right).$$

Da die Infektionsraten in der Regel sehr klein sind, können wir die Exponentialfunktion durch ihre lineare Näherung ersetzen. Damit vereinfacht sich der letzte Ausdruck zu

[1] reproduziert

 

$$t_2 = t_1 - \frac{1}{k_I}\ln\left(1 - k_I t_1\right).$$

Auch hier können wir den Logarithmus in erster Näherung durch den Ausdruck

$$\ln\left(1 - k_I t_1\right) \approx -k_I t_1$$

annähern, woraus sich ergibt: $t_2 \approx 2t_1$. Setzen wir nun anstelle von $t_1$ die Zeit $t_2$ in die obige Formel ein und ersetzen noch $t_2$ durch $t_3$, können wir, solange noch die Näherungsbedingungen erfüllt sind, die iterative Beziehung $t_{i+1} \approx 2t_i$ daraus ableiten. Allgemein gilt also

$$t_{n+1} \approx 2t_n = 2^2 t_{n-1} = \ldots = 2^n t_1.$$

Die ersten Glieder der Folge sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | … | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | $t_1$ | $2t_1$ | $4t_1$ | … | $2^{n-1}t_1$ |
| $t_{i+1}$ | $2t_1$ | $4t_1$ | $8t_1$ | … | $2^n t_1$ |

Damit haben wir gezeigt, daß sich bei Verdoppelung der Infektionszahlen die Zeitabstände ebenfalls verdoppeln,

qed

**Anmerkung:** Das beschriebene Verhalten gilt strenggenommen nur in Phase 1 der Epidemie. Sobald die Sterbe- und Genesungsrate zum Tragen kommen, ändert sich dieses Verhalten und äußerst sich durch ein Abflachen der Kurven. Das liegt aber nicht daran, daß sich die Raten geändert hätten, denn diese sind konstant und hängen nur von biologischen Faktoren ab, sondern weil durch eingeleitete Gegenmaßnahmen den Räubern, d.h. den Viren, eine geringere Beutezahl (d.h. noch nicht Infizierte) vorgegaukelt wird. Die Abklingphase einer durch Speichelkontakt übertragbaren Seuche wird also durch das Anlegen von Atemschutzmasken nur hinausgezögert, aber aufgeschoben ist eben nicht aufgehoben. Bei der geringsten Nachlässigkeit kann die Epidemie sofort erneut aufflammen.

 