Aufgabe: Berechnen Sie am Beispiel der Corona-Pandemie, wann diese in Deutschland zu Ende ist und wie viele Tote es geben wird.

Lösung: Während einer Pandemie kann sich der Mensch in einem der folgenden vier Zustände befinden. Er kann entweder noch nicht infiziert (A) oder bereits infiziert (B) sein, und er kann an den Folgen der Pandemie gestorben (C) oder von der Krankheit genesen sein (D). Zu Beginn der Pandemie sei die Gesamtzahl einer beliebigen Bevölkerung gleich N_0. Wir nehmen ferner an, daß es während des Verlaufs keine geburtenbedingten Zuwächse oder Sterbefälle gibt. In folgender Tabelle sind die vier Zustände noch einmal zusammengefaßt:

N_A	Zahl der vom Virus noch nicht Infizierten,
N_B	Zahl der mit dem Virus Infizierten,
N_C	Zahl der an der Krankheit Gestorbenen,
N_D	Zahl der von der Krankheit Genesenen.

Diese vier Kategorien addieren sich zur konstanten Gesamtzahl der Bevölkerung N_0 und haben folgenden zeitlichen Verlauf:

$$\begin{array}{llll}
\text{Phase 0:} & t \le t_B, & N_A(t) = N_0, & N_B(t) = N_C(t) = N_D(t) = 0; \\
\text{Phase 1:} & t_B \le t < t_C, & N_A(t) + N_B(t) = N_0, & N_C(t) = N_D(t) = 0; \\
\text{Phase 2:} & t_C \le t < t_D, & N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = N_0, & N_D(t) = 0; \\
\text{Phase 3:} & t \ge t_D, & N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) + N_D(t) = N_0. &
\end{array}$$

Die Vorphase 0 betrachten wir hier nicht. Hinsichtlich der anderen Zeitpunkte gilt:

t_B	Beginn der Infektion,
t_C	Zeitpunkt des ersten Todesfalls,
t_D	Zeitunkt der ersten Genesung.

Dabei kann $t_B = 0$ gesetzt werden, und für die zeitliche Aufeinanderfolge gilt $t_B < t_C < t_D$. Die Ableitungen der entsprechenden Häufigkeiten müssen wir nach Phasen getrennt betrachten:

$$\begin{array}{llll}
\text{Phase 0:} & t \le t_B, & \dot{N}_A(t) = 0; & \\
\text{Phase 1:} & t_B \le t < t_C, & \dot{N}_A(t) + \dot{N}_B(t) = 0, & \dot{N}_B(t) = k_I N_A(t); \\
\text{Phase 2:} & t_C \le t < t_D, & \dot{N}_A(t) + \dot{N}_B(t) + \dot{N}_C(t) = 0, & \dot{N}_C(t) = k_S N_B(t); \\
\text{Phase 3:} & t \ge t_D, & \dot{N}_A(t) + \dot{N}_B(t) + \dot{N}_C(t) + \dot{N}_D(t) = 0, & \dot{N}_D(t) = k_G N_B(t).
\end{array}$$

Damit haben wir folgende Differentialgleichungen zu lösen:

Phase 0:	$t \le t_B,$	$\dot{N}_A(t) = 0;$
Phase 1:	$t_B \le t < t_C,$	$\dot{N}_A(t) + k_I N_A(t) = 0;$
Phase 2:	$t_C \le t < t_D,$	$\ddot{N}_A(t) + k_I \dot{N}_A(t) + k_S k_I N_A(t) = 0;$
Phase 3:	$t \ge t_D,$	$\ddot{N}_A(t) + k_I \dot{N}_A(t) + (k_S + k_G) k_I N_A(t) = 0.$

Die Anfangsbedingungen der einzelnen Phasen lauten:

Phase 1	Phase 2	Phase 3
$N_A(t_B) = N_0$	$N_A(t_C) = N_0 - N_B(t_C)$	$N_A(t_D)$
$N_B(t_B) = 0$	$N_B(t_C)$	$N_B(t_D)$
$N_C(t_B) = 0$	$N_C(t_C) = 0$	$N_C(t_D) = N_0 - N_A(t_D) - N_B(t_D)$
$N_D(t_B) = 0$	$N_D(t_C) = 0$	$N_D(t_D) = 0$

In Phase 1 gilt $\dot{N}_B(t) = k_I N_A(t)$, weil sich die Zahl der Infizierten nur proportional zur Zahl der noch nicht Infizierten ändern kann. Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung

$$\dot{N}_A(t) + \dot{N}_B(t) = 0$$

ein, ergibt sich die Differentialgleichung der ersten Phase

$$\dot{N}_A(t) + k_I N_A(t) = 0.$$

Nach Trennung der Variablen erhalten wir

$$\frac{dN_A}{N_A} = -k_I dt.$$

Integrieren wir beide Seiten in den Grenzen von $[t_B, t]$,

$$\int_{N_A(t_B)}^{N_A(t)} \frac{dN_A}{N_A} = -k_I \int_{t_B}^{t} dt,$$

so lauten die bestimmten Integrale auf beiden Seiten

$$\ln \frac{N_A(t)}{N_A(t_B)} = -k_I (t - t_B).$$

Nach Auflösung dieses Ausdrucks ergibt sich in der ersten Phase eine Exponentialfunktion, die angibt, wie die Zahl der noch nicht Infizierten abnimmt:

$$N_A(t) = N_0 e^{-k_I (t - t_B)}.$$

Entsprechend steigt die Zahl der Infizierten:

$$N_B(t) = N_0 - N_A(t) = N_0\left(1 - e^{-k_I(t-t_B)}\right).$$

Zur Zeit $t = t_B$ gibt es noch keine Infizierten, d.h. $N_B(t_B) = 0$. Folglich ist $N_A(t_B) = N_0$. Zum Zeitpunkt des ersten Todesfalls ist dann

$$N_A(t_C) = N_0 e^{-k_I(t_C - t_B)} \quad \text{und} \quad N_B(t_C) = N_0\left(1 - e^{-k_I(t_C-t_B)}\right).$$

Die Rate der Infizierten im Intervall $\Delta t = t_2 - t_1$ mit $\Delta N_B = N_B(t_2) - N_B(t_1)$, wobei t_1 und t_2 beliebig sind, berechnet sich aus der Relation

$$k_I = \frac{1}{N_0 - N_B}\frac{\Delta N_B}{\Delta t}.$$

Mit den entsprechenden Werten, die wir weiter unten angeben werden, ergibt sich also ein Kurvenverlauf wie in Abb. 1 dargestellt.

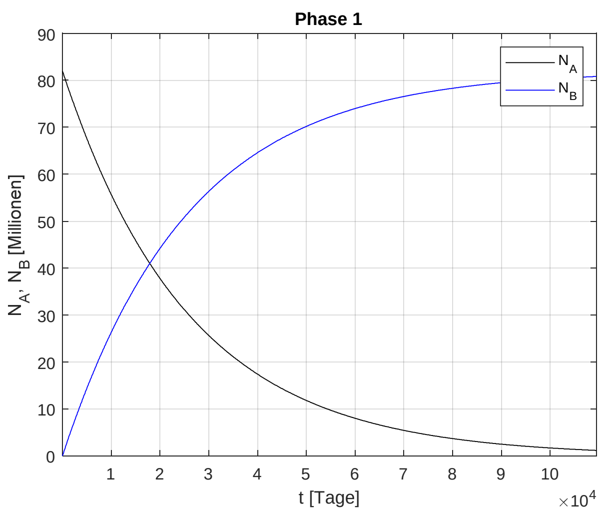

Abbildung 1. Exponentielle Phase ohne Tote und Genesende

So würde der Krankheitsverlauf aussehen, wenn es keine Toten und Genesenden gäbe. Nach ca. 300 Jahren wäre dann die gesamte Bevölkerung infiziert, aber weder gesund noch tot.[1]

In der Phase 2 fügen wir eine Sterberate k_S hinzu, deren Eintrittszeitpunkt t_C früher liegt als der der ersten Genesung t_D. Da die Zahl der an der Krankheit Gestorbenen ebenfalls nur von der Zahl der Infizierten abhängt, gilt also im Intervall $t_C \le t < t_D$ eine zusätzliche Ratengleichung für N_C:

$$\dot{N}_B(t) = k_I N_A(t),$$
$$\dot{N}_C(t) = k_S N_B(t),$$

[1] Abgesehen von der natürlichen Sterbe- und Geburtsrate, die wir hier aber nicht berücksichtigen.

wobei wir beide Ableitungen nun in die Differentialgleichung der Phase 2,

$$\dot{N}_A(t) + \dot{N}_B(t) + \dot{N}_C(t) = 0,$$

einsetzen und nach nochmaliger Differentiation die folgende Gleichung erhalten:

$$\ddot{N}_A(t) + k_I \dot{N}_A(t) + k_S \dot{N}_B(t) = 0.$$

Eliminieren wir nun noch $\dot{N}_B(t)$, folgt eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{N}_A(t) + k_I \dot{N}_A(t) + k_S k_I N_A(t) = 0.$$

Das ist die Gleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators mit dem Dämpfungsglied k_I und der Eigenfrequenz $\sqrt{k_S k_I}$, die wir mit dem Ansatz $N_A(t) = e^{\lambda t}$ über die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + k_I \lambda + k_S k_I = 0$$

lösen können. Die Eigenwerte dieser quadratischen Gleichung sind gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} k_I \pm \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I}.$$

Damit erhalten wir für die Funktion und ihre erste Ableitung die Ausdrücke

$$\begin{aligned} N_A(t) &= A_1 e^{-\frac{1}{2} k_I t + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t}} + A_2 e^{-\frac{1}{2} k_I t - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t}}, \\ \dot{N}_A(t) &= \left(-\frac{1}{2} k_I t + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I} \right) A_1 e^{-\frac{1}{2} k_I t + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t}} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} k_I t - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I} \right) A_2 e^{-\frac{1}{2} k_I t - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t}}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich damit die Anfangswerte

$$\begin{aligned} N_A(t_C) &= A_1 e^{-\frac{1}{2} k_I t_C + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t_C}} + A_2 e^{-\frac{1}{2} k_I t_C - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t_C}}, \\ \dot{N}_A(t_C) &= \left(-\frac{1}{2} k_I + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I} \right) A_1 e^{-\frac{1}{2} k_I t_C + \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t_C}} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2} k_I - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I} \right) A_2 e^{-\frac{1}{2} k_I t_C - \sqrt{\frac{1}{4} k_I^2 - k_S k_I t_C}} \end{aligned}$$

und daraus die Amplituden

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}k_I - \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}\right)N_A(t_C) - \dot{N}_A(t_C)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}} e^{\frac{1}{2}k_I t_C - \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}\,t_C},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}k_I + \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}\right)N_A(t_C) - \dot{N}_A(t_C)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}} e^{\frac{1}{2}k_I t_C + \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}\,t_C}.$$

Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung lautet also

$$\begin{aligned} N_A(t) = {} & N_A(t_C) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}(t-t_C)} + e^{-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}(t-t_C)}\right) \\ & + \frac{\frac{1}{2}k_I N_A(t_C) + \dot{N}_A(t_C)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}} e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}(t-t_C)} - e^{-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - k_S k_I}(t-t_C)}\right). \end{aligned}$$

Im Falle

$$k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2 > 0$$

resultiert daraus eine abklingende Sinusschwingung der Form

$$\begin{aligned} N_A(t) = {} & N_A(t_C) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}(t-t_C)} + e^{-i\sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}(t-t_C)}\right) \\ & - \frac{\frac{1}{2}k_I N_A(t_C) + k_S N_B(t_C)}{\sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}} e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}(t-t_C)} - e^{-i\sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}(t-t_C)}\right), \end{aligned}$$

und wenn wir die Exponentialfunktionen durch Sinus und Kosinus ersetzen, der Ausdruck

$$\begin{aligned} N_A(t) = {} & N_A(t_C) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \cos\omega(t-t_C) \\ & - \left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_C) + k_S N_B(t_C)\right) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega} \end{aligned}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{k_S k_I - \frac{1}{4}k_I^2}.$$

Daraus ergeben sich die weiteren Unbekannten

$$N_B(t) = N_B(t_C) + k_I \int_{t_C}^{t} N_A(t)\,dt,$$

$$N_C(t) = N_C(t_C) + k_S \int_{t_C}^{t} N_B(t)\,dt.$$

N_B folgt nach Einsetzen der Zahl der noch nicht Infizierten aus der Integralgleichung

$$N_B(t) = N_B(t_C) + k_I N_A(t_C) \int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt$$
$$-\frac{k_I}{\omega}\left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_C) + k_S N_B(t_C)\right) \int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt,$$

und mit den bestimmten Integralen

$$\int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt = \frac{1}{\frac{1}{4}k_I^2 + \omega^2}\left[-\frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \cos\omega(t-t_C)\right.$$
$$\left. + \omega e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \sin\omega(t-t_C) + \frac{1}{2}k_I\right],$$

$$\int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt = \frac{1}{\frac{1}{4}k_I^2 + \omega^2}\left[-\frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \sin\omega(t-t_C)\right.$$
$$\left. - \omega e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \cos\omega(t-t_C) + \omega\right]$$

ergibt sich schließlich die Zahl der Infizierten zu

$$N_B(t) = N_B(t_C) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \cos\omega(t-t_C)$$
$$+ k_I\left(N_A(t_C) + \frac{1}{2}N_B(t_C)\right) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)} \frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}.$$

Setzen wir diese Lösung in die zweite Integralgleichung ein, erhalten wir die Zahl der an der Epidemie Gestorbenen

$$N_C(t) = N_C(t_C) + k_S N_B(t_C) \int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt$$
$$+ \frac{k_S k_I}{\omega}\left(N_A(t_C) + \frac{1}{2}N_B(t_C)\right) \int_0^{t-t_C} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt.$$

Mit den obigen Integralen folgt weiter

$$N_C(t) = N_B(t_C)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cos\omega(t-t_C) + \left(k_S - \frac{1}{2}k_I\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}\right)$$
$$+N_A(t_C)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cos\omega(t-t_C) - \frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}\right) + N_C(t_C).$$

Die Summe aller drei Lösungen ergibt die konstante Anfangspopulation:

$$N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) = N_A(t_C) + N_B(t_C) + N_C(t_C) = N_0.$$

Wegen $N_C(t_C) = 0$ können wir eine Unbekannte eliminieren. Wählen wir die Variable

$$N_A(t_C) = N_0 - N_B(t_C),$$

folgen die drei Pandemiegrößen in finaler Form:

$$N_A(t) = \left(N_0 - N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\left(\cos\omega(t-t_C) - \frac{k_I}{2}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}\right)$$
$$-k_S N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega},$$

$$N_B(t) = N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\left(\cos\omega(t-t_C) - \frac{k_I}{2}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}\right)$$
$$+k_I N_0 e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega},$$

$$N_C(t) = N_0\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\left(\cos\omega(t-t_C) + \frac{1}{2}k_I\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega}\right)\right)$$
$$+k_S N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sin\omega(t-t_C)}{\omega},$$

womit wir die Startwerte für die anschließende Phase 3 berechnen können:

$$N_A(t_D) = \left(N_0 - N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\left(\cos\omega(t_D-t_C) - \frac{k_I}{2}\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega}\right)$$
$$-k_S N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega},$$

$$N_B(t_D) = N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\left(\cos\omega(t_D-t_C) - \frac{k_I}{2}\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega}\right)$$
$$+k_I N_0 e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega},$$

$$N_C(t_D) = N_0\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\left(\cos\omega(t_D-t_C)+\frac{1}{2}k_I\,\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega}\right)\right)$$
$$+k_S N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sin\omega(t_D-t_C)}{\omega}.$$

Die Lösungen im aperiodischen Grenzfall, d.h. für $\omega=0$, lauten:

$$N_A(t)=N_A(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}-\left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_C)+k_S N_B(t_C)\right)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)},$$

$$N_B(t)=N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}+k_I\left(N_A(t_C)+\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)},$$

$$N_C(t)=N_C(t_C)+N_A(t_C)\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\right)$$
$$+N_B(t_C)\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}+\left(k_S-\frac{1}{2}k_I\right)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\right).$$

Wegen $N_C(t_C)=0$ können wir noch eine Unbekannte eliminieren und ersetzen entsprechend

$$N_A(t_C)=N_0-N_B(t_C).$$

Damit vereinfachen sich die Lösungen zu

$$N_A(t)=\left(N_0-N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}-\left(\frac{1}{2}k_I\left(N_0-N_B(t_C)\right)+k_S N_B(t_C)\right)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)},$$

$$N_B(t)=N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}+k_I\left(N_0-\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)},$$

$$N_C(t)=N_0\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\right)+k_S N_B(t_C)(t-t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}.$$

Die Startwerte für Phase 3 lauten in diesem Fall

$$N_A(t_D)=\left\{N_0-N_B(t_C)-\left(\frac{1}{2}k_I\left(N_0-N_B(t_C)\right)+k_S N_B(t_C)\right)(t_D-t_C)\right\}e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}.$$

$$N_B(t_D)=\left\{N_B(t_C)+k_I\left(N_0-\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)(t_D-t_C)\right\}e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}.$$

$$N_C(t_D)=N_0-\left\{N_0+\left[\frac{1}{2}k_I N_0-k_S N_B(t_C)\right](t_D-t_C)\right\}e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}.$$

Im unwahrscheinlichen hyperbolischen Fall[2] wären die Lösungen gegeben durch

$$\begin{aligned}
N_A(t) &= N_A(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh\omega(t-t_C)\\
&\quad-\left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_C)+k_S N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh\omega(t-t_C)}{\omega},\\
N_B(t) &= N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh(t-t_C)+\frac{k_I}{\omega}\left(N_A(t_C)+\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\sinh(t-t_C),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_C(t) &= \left(N_A(t_C)+N_B(t_C)\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh\omega(t-t_C)-\frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh(t-t_C)}{\omega}\right)\\
&\quad+N_C(t_C)+k_S N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh\omega(t-t_C)}{\omega},
\end{aligned}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-k_S k_I}\,.$$

Wegen $N_C(t_C)=0$ können wir wie gehabt die Unbekannte $N_A(t_C)=N_0-N_B(t_C)$ eliminieren, so daß

$$\begin{aligned}
N_A(t) &= \left(N_0-N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh\omega(t-t_C)\\
&\quad-\left(\frac{1}{2}k_I N_0-\left(\frac{1}{2}k_I-k_S\right)N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh\omega(t-t_C)}{\omega},
\end{aligned}$$

$$N_B(t)=N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh(t-t_C)+k_I\left(N_0-\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh(t-t_C)}{\omega},$$

$$\begin{aligned}
N_C(t) &= N_0\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\cosh\omega(t-t_C)\right)\\
&\quad-\left(\frac{1}{2}k_I N_0-k_S N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_C)}\frac{\sinh\omega(t-t_C)}{\omega}.
\end{aligned}$$

Die Startwerte für Phase 3 lauten damit

$$\begin{aligned}
N_A(t_D) &= \left(N_0-N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\cosh\omega(t_D-t_C)\\
&\quad-\left(\frac{1}{2}k_I N_0-\left(\frac{1}{2}k_I-k_S\right)N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sinh\omega(t_D-t_C)}{\omega},
\end{aligned}$$

[2] Da die Infektionsrate in der Regel sehr viel kleiner ist als Sterbe- und Genesungsrate

$$N_B(t_D) = N_B(t_C)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\cosh(t_D-t_C)$$
$$+k_I\left(N_0-\frac{1}{2}N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sinh(t_D-t_C)}{\omega},$$

$$N_C(t_D) = N_0\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\cosh\omega(t_D-t_C)\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2}k_I N_0 - k_S N_B(t_C)\right)e^{-\frac{1}{2}k_I(t_D-t_C)}\frac{\sinh\omega(t_D-t_C)}{\omega}.$$

Die Rate der an der Krankheit Verstorbenen berechnet sich mit den weiter unten angegebenen Tabellenwerten analog aus der Zunahme der Toten im Intervall Δt:

$$k_S = \frac{1}{N_B}\frac{\Delta N_C}{\Delta t}.$$

Wenn es nun keine Genesung durch das körpereigene Immunsystem gäbe, wären nach knapp 3 Jahren fast alle an der Krankheit gestorben. Es gäbe demzufolge nach Ablauf dieser Zeitspanne in Deutschland noch ca. 90.000 Infizierte, der Rest des Volkes wäre ausgestorben.

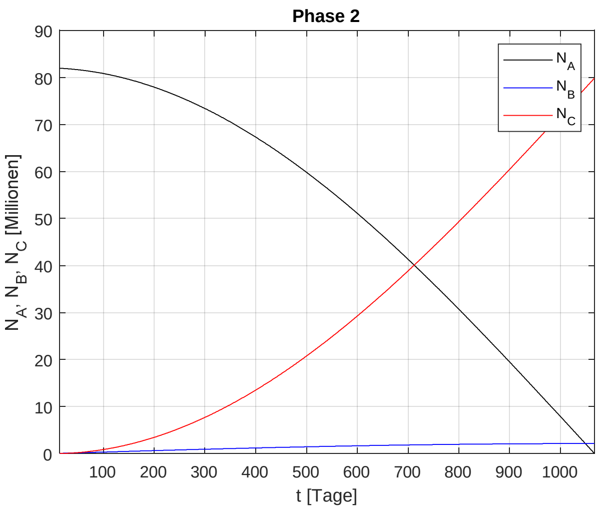

Abbildung 2. Der Pandemieverlauf ohne Genesene

Da die Zahl der von der Krankheit Genesenen ebenfalls vollständig von der Zahl der Infizierten abhängt, und nicht von der Zahl der noch nicht Infizierten, kommt folglich für $t \geq t_D$ (Phase 3) noch eine weitere Ratengleichung hinzu,

$$\dot{N}_B(t) = k_I N_A(t),$$
$$\dot{N}_C(t) = k_S N_B(t),$$
$$\dot{N}_D(t) = k_G N_B(t),$$

wobei alle drei der Differentialgleichung

$$\dot{N}_A(t)+\dot{N}_B(t)+\dot{N}_C(t)+\dot{N}_D(t)=0$$

genügen müssen. Setzen wir die obigen Gleichungen wie gehabt in die letzte Gleichung ein, ergibt sich nach Differentiation wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$\ddot{N}_A(t)+k_I\dot{N}_A(t)+(k_S+k_G)\dot{N}_B(t)=0.$$

Eliminieren wir darin $\dot{N}_B(t)$, folgt erneut die Schwingungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators mit einer lediglich etwas größeren Eigenfrequenz als in Phase 2,

$$\ddot{N}_A(t)+k_I\dot{N}_A(t)+(k_S+k_G)k_I N_A(t)=0.$$

Mit dem gleichen Ansatz wie oben erhalten wir die erweiterte charakteristische Gleichung

$$\lambda^2+k_I\lambda+(k_S+k_G)k_I=0,$$

deren Eigenwerte gegeben sind durch

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}k_I\pm\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}.$$

Mittels der Zahl der noch nicht Infizierten und ihrer Ableitung

$$\begin{aligned}
N_A(t)&=A_1e^{-\frac{1}{2}k_It+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t}+A_2e^{-\frac{1}{2}k_It-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t},\\
\dot{N}_A(t)&=\left(-\frac{1}{2}k_It+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\right)A_1e^{-\frac{1}{2}k_It+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t}\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2}k_It-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\right)A_2e^{-\frac{1}{2}k_It-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t}
\end{aligned}$$

ergeben sich die Anfangswerte

$$\begin{aligned}
N_A(t_D)&=A_1e^{-\frac{1}{2}k_It_D+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t_D}+A_2e^{-\frac{1}{2}k_It_D-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t_D},\\
\dot{N}_A(t_D)&=\left(-\frac{1}{2}k_I+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\right)A_1e^{-\frac{1}{2}k_It_D+\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t_D}\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2}k_I-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\right)A_2e^{-\frac{1}{2}k_It_D-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2-(k_S+k_G)k_I}\,t_D}
\end{aligned}$$

und daraus die Amplituden

$$A_1 = -\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}k_I - \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S + k_G)k_I}\right)N_A(t_D) - \dot{N}_A(t_D)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S + k_G)k_I}} e^{\frac{1}{2}k_I t_D - \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,t_D}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}k_I + \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S + k_G)k_I}\right)N_A(t_D) - \dot{N}_A(t_D)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S + k_G)k_I}} e^{\frac{1}{2}k_I t_D + \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,t_D},$$

was zur folgenden allgemeinen Lösung

$$N_A(t) = N_A(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,(t-t_D)} + e^{-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,(t-t_D)}\right)$$
$$+\frac{\frac{1}{2}k_I N_A(t_D) + \dot{N}_A(t_D)}{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}} e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,(t-t_D)} - e^{-\sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S+k_G)k_I}\,(t-t_D)}\right)$$

führt. Im Falle

$$(k_S + k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2 > 0$$

ergibt sich wieder eine Sinusschwingung der Form

$$N_A(t) = N_A(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{(k_S+k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2}\,(t-t_D)} + e^{-i\sqrt{(k_S+k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2}\,(t-t_D)}\right)$$
$$-\frac{\frac{1}{2}k_I N_A(t_D) + (k_S + k_G)N_B(t_D)}{\sqrt{(k_S+k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2}} e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{(k_S+k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2}\,(t-t_D)} - e^{-i\sqrt{(k_S+k_G)k_I - \frac{1}{4}k_I^2}\,(t-t_D)}\right),$$

wobei wir die erste Ableitung mittels der Relation

$$\dot{N}_A(t_D) = -k_I N_A(t_D) - (k_S + k_G)N_B(t_D)$$

eliminiert haben. Wenn wir noch die Exponentialfunktionen durch Sinus und Kosinus ersetzen, erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$N_A(t) = N_A(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \cos\omega(t-t_D)$$
$$-\left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_D) + (k_S + k_G)N_B(t_D)\right) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\left(k_S + k_G\right) k_I - \frac{1}{4} k_I^2}.$$

Damit ergeben sich auch die drei restlichen Unbekannten:

$$N_B\left(t\right) = N_B\left(t_D\right) + k_I \int_{t_D}^{t} N_A\left(t\right) dt,$$

$$N_C\left(t\right) = N_C\left(t_D\right) + k_S \int_{t_D}^{t} N_B\left(t\right) dt,$$

$$N_D\left(t\right) = N_D\left(t_D\right) + k_G \int_{t_D}^{t} N_B\left(t\right) dt.$$

Die Zahl der Infizierten leitet sich durch Integration der Zahl der noch nicht Infizierten her:

$$N_B\left(t\right) = N_B\left(t_D\right) + k_I N_A\left(t_D\right) \int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt$$
$$- \frac{k_I}{\omega}\left(\frac{1}{2} k_I N_A\left(t_D\right) + \left(k_S + k_G\right) N_B\left(t_D\right)\right) \int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt.$$

Mit den bestimmten Integralen

$$\int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt = \frac{1}{\frac{1}{4}k_I^2 + \omega^2}$$
$$\times\left[-\frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \cos\omega\left(t-t_D\right) + \omega e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \sin\omega\left(t-t_D\right) + \frac{1}{2}k_I\right]$$

und

$$\int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt = \frac{1}{\frac{1}{4}k_I^2 + \omega^2}$$
$$\times\left[-\frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \sin\omega\left(t-t_D\right) - \omega e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \cos\omega\left(t-t_D\right) + \omega\right]$$

ergibt sich zunächst die Zahl der Infizierten

$$N_B\left(t\right) = N_B\left(t_D\right) e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \cos\omega\left(t-t_D\right)$$
$$+ \frac{k_I}{\omega}\left(N_A\left(t_D\right) + \frac{1}{2} N_B\left(t_D\right)\right) e^{-\frac{1}{2}k_I\left(t-t_D\right)} \sin\omega\left(t-t_D\right),$$

und eingesetzt in die Ausdrücke für N_C und N_D führt sie uns zu den Integralgleichungen

$$N_C(t) = N_C(t_D) + k_S N_B(t_D) \int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt + \frac{k_S k_I}{\omega}\left(N_A(t_D) + \frac{1}{2}N_B(t_D)\right)\int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt$$

und

$$N_D(t) = N_D(t_D) + k_G N_B(t_D) \int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \cos\omega t dt + \frac{k_G k_I}{\omega}\left(N_A(t_D) + \frac{1}{2}N_B(t_D)\right)\int_0^{t-t_D} e^{-\frac{1}{2}k_I t} \sin\omega t dt.$$

Nach erneutem Einsetzen der bestimmten Integrale lauten die beiden Lösungen schließlich

$$N_C(t) = N_C(t_D) + k_S N_B(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega} + k_S \frac{N_A(t_D) + N_B(t_D)}{k_S + k_G}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\cos\omega(t-t_D) - \frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right),$$

$$N_D(t) = N_D(t_D) + k_G N_B(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega} + k_G \frac{N_A(t_D) + N_B(t_D)}{k_S + k_G}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\cos\omega(t-t_D) - \frac{1}{2}k_I e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right).$$

Die Summe aller vier Lösungen ergibt wieder die konstante Populationsgröße:

$$N_A(t) + N_B(t) + N_C(t) + N_D(t) = N_A(t_D) + N_B(t_D) + N_C(t_D) + N_D(t_D) = N_0.$$

Wegen $N_D(t_D) = 0$ können wir wie gehabt eine der Unbekannten eliminieren. Wir wählen

$$N_C(t_D) = N_0 - N_A(t_D) - N_B(t_D).$$

Damit folgen abschließend alle vier Lösungen der Differentialgleichung:

$$N_A(t) = N_A(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cos\omega(t-t_D) - \frac{1}{2}k_I \frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right) - (k_S + k_G) N_B(t_D) e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)} \frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega},$$

$$N_B(t)=N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cos\omega(t-t_D)+\frac{1}{2}k_I\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right)$$
$$+k_I N_A(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega},$$

$$N_C(t)=N_0-k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}+k_S N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}$$
$$-k_S\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cos\omega(t-t_D)+\frac{1}{2}k_I\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right),$$

$$N_D(t)=k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}+k_G N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}$$
$$-k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cos\omega(t-t_D)+\frac{1}{2}k_I\frac{\sin\omega(t-t_D)}{\omega}\right).$$

Im aperiodischen Grenzfall $\omega=0$ lauten diese

$$N_A(t)=N_A(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}$$
$$-\left(\frac{1}{2}k_I N_A(t_D)+(k_S+k_G)N_B(t_D)\right)(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)},$$

$$N_B(t)=N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}+k_I\left(N_A(t_D)+\frac{1}{2}N_B(t_D)\right)(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)},$$

$$N_C(t)=N_C(t_D)+k_S\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\right)$$
$$+k_S N_B(t_D)(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)},$$

$$N_D(t)=N_D(t_D)+k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}\left(1-e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\right)$$
$$+k_G N_B(t_D)(t-t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)},$$

und im hyperbolischen Fall sind sie gegeben durch

$$N_A(t)=N_A(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cosh\omega(t-t_D)-\frac{1}{2}k_I\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}\right)$$
$$-(k_S+k_G)N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega},$$

$$N_B(t) = N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cosh\omega(t-t_D) + \frac{1}{2}k_I\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}\right)$$
$$+k_I N_A(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega},$$

$$N_C(t) = N_0 - k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G} + k_S N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}$$
$$-k_S\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cosh\omega(t-t_D) + \frac{1}{2}k_I\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}\right),$$

$$N_D(t) = k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G} + k_G N_B(t_D)e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}$$
$$-k_G\frac{N_A(t_D)+N_B(t_D)}{k_S+k_G}e^{-\frac{1}{2}k_I(t-t_D)}\left(\cosh\omega(t-t_D) + \frac{1}{2}k_I\frac{\sinh\omega(t-t_D)}{\omega}\right)$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4}k_I^2 - (k_S + k_G)k_I}.$$

Die Rate der Genesenen berechnet sich demgemäß wie folgt:

$$k_G = \frac{1}{N_B}\frac{\Delta N_D}{\Delta t}.$$

In der folgenden Abbildung ist zu erkennen, daß die Zahl der Genesenen die Zahl der Toten bei weitem übersteigt. Nach 220 Tagen haben wir 78 Millionen Genesene, 3,47 Millionen Tote und immerhin noch 452.700 Infizierte, aber nur mehr 29.800 Nichtinfizierte. Die Pandemie wird also länger als 7 Monate in Deutschland wüten, sofern kein Impfstoff gefunden

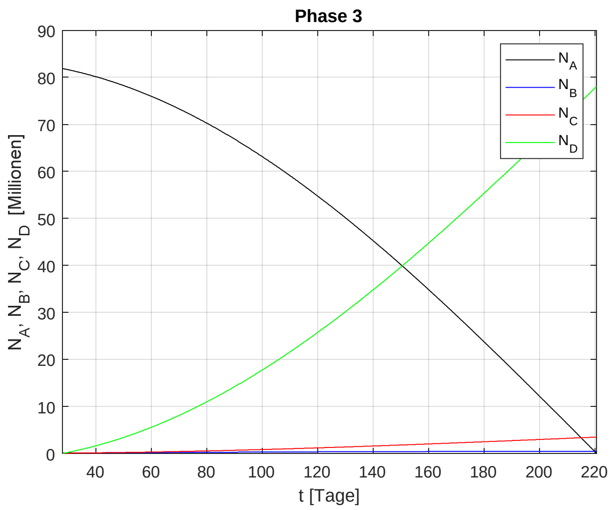

Abbildung 3. Der Pandemieverlauf mit Infizierten, Toten und Genesenen

wird. Bei einer Weltbevölkerung von 7,79 Milliarden entsprechend einer Bevölkerung Deutschlands von 81.504.947 und einer Bevölkerung Italiens von 60.462.000 lagen die Daten der Pandemie am 9. April 2020 bei folgenden Werten:

	Infizierte	Tote	Genesene	k_I	k_S	k_G
Welt	1.484.811	88.539	329.876	$1,065 \cdot 10^{-5}$	$0,050$	$0,215$
Deutschland	113.296	2.349	46.300	$3,874 \cdot 10^{-5}$	$0,055$	$1,254$
Italien	139.422	17.669	26.491	$6,359 \cdot 10^{-5}$	$0,0269$	$0,084$

Am 15. April 2020, also sechs Tage später, ergaben sich folgende Werte:

	Infizierte	Tote	Genesene	ΔN_B	ΔN_C	ΔN_D
Welt	1.982.552	126.753	493.658	479.741	38.214	163.782
Deutschland	132.210	3.495	72.600	18.914	1.146	26.300
Italien	162.488	21.067	37.130	23.066	3.398	10.639

Die Zeitdifferenz in Tagen zwischen den beiden Messungen beträgt $\Delta t = 6$. Die Rechenergebnisse basieren wie gesagt auf den zu diesen Tagen angegebenen offiziellen Zahlen, von einer hohen Dunkelziffer ist auszugehen. Wichtig ist aber das Verständnis der physikalischen Gleichungen. Da die Sterberate und auch die Genesungsrate erheblich größer sind als die Infektionsrate, ergeben sich sinusförmige Lösungen. Für das Abklingen der Pandemie ist daher weniger der Exponentialfaktor maßgeblich, sondern vielmehr die Periodendauer einer Schwingung, die umgekehrt proportional zur Kreisfrequenz ist. Je kürzer die Periodendauer, desto größer die Frequenz und desto größer die Sterbe- und Genesungsrate. Deutschland hat in der obigen Tabelle die höchste Genesungsrate. Auch bei der Sterberate liegt Deutschland über dem Weltdurchschnitt. Es spricht also vieles dafür, daß das Virus aus Deutschland stammt, weil die zeitliche Entwicklung der Lösungen bei uns am weitesten fortgeschritten ist. Warum wir eine so hohe Genesungsrate haben, mag auch genetische Ursachen haben. Der in der Kälte lebende Mensch[3] entwickelt höhere Widerstandskräfte gegen Grippeviren und wurde von der Evolution durch Vorteile gegenüber Erkältungskrankheiten begünstigt. Das Immunsystem ist keine Sache von zweitausend Jahren, sondern eher eine von 2.000.000 Jahren.

Wie bei einem gedämpften harmonischen Oszillator üblich, ist die Erhöhung des Dämpfungsgliedes die beste Methode, ihn zum Abklingen zu bringen. Das würde allerdings eine Erhöhung der Infektionsrate bedeuten. Die Regierungen machen aber gerade das Gegenteil und versuchen durch alle möglichen Maßnahmen die Infektionsrate niedrig zu halten. Das führt nur zu einer Verlängerung der Pandemiedauer. Die Gefahr dabei ist, daß sich durch das Hinauszögern der Krankheit Mutationen ergeben könnten, gegen die wieder kein Impfstoff vorhanden ist, und somit neue Gefahren heraufbeschworen werden.

Obwohl die Rechnungen in aller Sorgfalt durchgeführt wurden und die Software validiert ist, kann rein vorsorglich keine Verantwortung für die Ergebnisse und Schlußfolgerungen übernommen werden.

[3] Der Klimawandel ist eine noch relativ junge Erscheinung.

Anhang

```
% Pandemie
clear all
n = 1001;

% Zeiten in Tagen
t_B = 0;
t_C = 14;
t_D = 28;
t_E = 365;

% Deutschland
N0 = 82;
k_I = 3.874e-5;
k_S = 0.055;
k_G = 1.254;

% Phase 1
disp('Phase 1')
disp('exponentiell')
for i = 1:n
    t(i) = t_B+(i-1)*(300*t_E-t_B)/(n-1);
    N_A(i) = N0*exp(-k_I*(t(i) - t_B));
    N_B(i) = N0*(1-exp(-k_I*(t(i) - t_B)));
end
% Endwerte aus Phase 1
NA_C = N0*exp(-k_I*(t_C-t_B))
NB_C = N0 - NA_C

figure(1)
plot(t,N_A,'k')
grid on
xlabel ('t [Tage]');
ylabel('N_A, N_B [Millionen]');
title('Phase 1')

xlim([t_C 300*t_E])
hold on
plot(t,N_B,'b')
legend('N_A','N_B');

% Phase 2
disp('Phase 2')
t_E = 38.11*t_D;
const1 = (NA_C+NB_C)/k_S;
if k_S*k_I-k_I^2/4 >= 0
    disp('sinusförmig')
    omega = sqrt(k_S*k_I-k_I^2/4)
    for i = 1:n
        t(i) = t_C+(i-1)*(t_E-t_C)/(n-1);
        N_A(i) = exp(-k_I/2*(t(i) - t_C))*(NA_C*(cos(omega*(t(i)-t_C))-
k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_C))/omega)-k_S*NB_C*sin(omega*(t(i)-t_C))/omega);
        N_B(i) = exp(-k_I/2*(t(i) - t_C))*(NB_C*(cos(omega*(t(i)-
t_C))+k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_C))/omega)+k_I*NA_C*sin(omega*(t(i)-
t_C))/omega);
        N_C(i) = N0*(1 - exp(-k_I/2*(t(i) - t_C))*(cos(omega*(t(i)-
t_C))+k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_C))/omega))+k_S*NB_C*exp(-k_I/2*(t(i) -
t_C))*sin(omega*(t(i)-t_C))/omega;
    end
```



```
    % Endwerte aus Phase 2
    NA_D    =    exp(-k_I/2*(t_D    -    t_C))*(NA_C*(cos(omega*(t_D-t_C))-
k_I/2*sin(omega*(t_D-t_C))/omega)-k_S*NB_C*sin(omega*(t_D-t_C))/omega)
    NB_D     =     exp(-k_I/2*(t_D     -     t_C))*(NB_C*(cos(omega*(t_D-
t_C))+k_I/2*sin(omega*(t_D-t_C))/omega)+k_I*NA_C*sin(omega*(t_D-
t_C))/omega)
    NC_D   =   N0*(1   -   exp(-k_I/2*(t_D   -   t_C))*(cos(omega*(t_D-
t_C))+k_I/2*sin(omega*(t_D-t_C))/omega))+k_S*NB_C*exp(-k_I/2*(t_D        -
t_C))*sin(omega*(t_D-t_C))/omega
else
    disp('hyperbolisch')
    omega = sqrt(k_I^2/4-k_S*k_I)
    for i = 1:n
        t(i) = t_C+(i-1)*(t_E-t_C)/(n-1);
        N_A(i)  =  exp(-k_I/2*(t(i)  -  t_C))*(NA_C*(cosh(omega*(t(i)-t_C))-
k_I/2*sinh(omega*(t(i)-t_C))/omega)-k_S*NB_C*sinh(omega*(t(i)-t_C))/omega);
        N_B(i)    =    NB_C*exp(-k_I/2*(t(i)    -    t_C))*cosh(omega*(t(i)-
t_C))+k_I*(N0-NB_C/2)*exp(-k_I/2*(t(i)       -       t_C))*sinh(omega*(t(i)-
t_C))/omega;
        N_C(i) = N0*(1 - exp(-k_I/2*(t(i) - t_C))*cosh(omega*(t(i)-t_C)))-
(k_I/2*N0-k_S*NB_C)*exp(-k_I/2*(t(i) - t_C))*sinh(omega*(t(i)-t_C))/omega;
    end
    % Endwerte aus Phase 2
    NA_D    =    exp(-k_I/2*(t_D    -    t_C))*(NA_C*(cosh(omega*(t_D-t_C))-
k_I/2*sinh(omega*(t_D-t_C))/omega)-k_S*NB_C*sinh(omega*(t_D-t_C))/omega)
    NB_D   =   NB_C*exp(-k_I/2*(t_D   -   t_C))*cosh(omega*(t_D-t_C))+k_I*(N0-
NB_C/2)*exp(-k_I/2*(t_D - t_C))*sinh(omega*(t_D-t_C))/omega
    NC_D   =   N0*(1   -   exp(-k_I/2*(t_D   -   t_C))*cosh(omega*(t_D-t_C)))-
(k_I/2*N0-k_S*NB_C)*exp(-k_I/2*(t_D - t_C))*sinh(omega*(t_D-t_C))/omega
end

figure(2)
plot(t,N_A,'k')
grid on
xlabel ('t [Tage]');
ylabel('N_A, N_B, N_C [Millionen]');
title('Phase 2')
xlim([t_C t_E])
title('Phase 2')

hold on
plot(t,N_B,'b')
hold on
plot(t,N_C,'r')
legend('N_A','N_B','N_C');

% Phase 3
disp('Phase 3')
t_E = 7.875*t_D;
if (k_S+k_G)*k_I-k_I^2/4 >= 0
    disp('sinusförmig')
    omega = sqrt((k_S+k_G)*k_I-k_I^2/4)
    const1 = (NA_D+NB_D)/(k_S+k_G);
    for i = 1:n
        t(i) = t_D+(i-1)*(t_E-t_D)/(n-1);
        N_A(i)  =  exp(-k_I/2*(t(i)  -  t_D))*(NA_D*(cos(omega*(t(i)-t_D))-
k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega)-(k_S+k_G)*NB_D*sin(omega*(t(i)-
t_D))/omega);
        N_B(i)    =    exp(-k_I/2*(t(i)    -    t_D))*(NB_D*(cos(omega*(t(i)-
t_D))+k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega)+k_I*NA_D*sin(omega*(t(i)-
t_D))/omega);
```



```
        N_C(i)    =    N0    -    k_G*const1+k_S*NB_D*exp(-k_I/2*(t(i)    -
t_D))*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega-k_S*const1*exp(-k_I/2*(t(i)           -
t_D))*(cos(omega*(t(i)-t_D))+k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega);
        N_D(i)       =       k_G*const1+k_G*NB_D*exp(-k_I/2*(t(i)       -
t_D))*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega-k_G*const1*exp(-k_I/2*(t(i)           -
t_D))*(cos(omega*(t(i)-t_D))+k_I/2*sin(omega*(t(i)-t_D))/omega);
    end
else
    disp('hyperbolisch')
    omega = sqrt(k_I^2/4-(k_S+k_G)*k_I)
    const1 = (NA_D+NB_D)/(k_S+k_G);
    for i = 1:n
        t(i) = t_D+(i-1)*(t_E-t_D)/(n-1);
        N_A(i)  =  exp(-k_I/2*(t(i)  -  t_D))*(NA_D*(cosh(omega*(t(i)-t_D))-
k_I/2*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega)-(k_S+k_G)*NB_D*sinh(omega*(t(i)-
t_D))/omega);
        N_B(i)  =  exp(-k_I/2*(t(i)  -  t_D))*(NB_D*(cosh(omega*(t(i)-t_D))-
k_I/2*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega)+k_I*NA_D*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega);
        N_C(i)    =    N0    -    k_G*const1+k_S*NB_D*exp(-k_I/2*(t(i)    -
t_D))*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega-k_S*const1*exp(-k_I/2*(t(i)          -
t_D))*(cosh(omega*(t(i)-t_D))-k_I/2*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega);
        N_D(i)       =       k_G*const1+k_G*NB_D*exp(-k_I/2*(t(i)       -
t_D))*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega-k_G*const1*exp(-k_I/2*(t(i)          -
t_D))*(cosh(omega*(t(i)-t_D))-k_I/2*sinh(omega*(t(i)-t_D))/omega);
    end
end
figure(3)
plot(t,N_A,'k')
grid on
xlabel ('t [Tage]');
ylabel('N_A, N_B, N_C, N_D  [Millionen]');
xlim([t_D t_E])
title('Phase 3')
xlim([t_D t_E])

hold on
plot(t,N_B,'b')
hold on
plot(t,N_C,'r')
hold on
plot(t,N_D,'g')
legend('N_A','N_B','N_C','N_D');

>> pandemic
Phase 1 (exponentiell)
NA_C = 81.9555
NB_C = 0.0445
Phase 2 (sinusförmig)
omega = 0.0015
NA_D = 81.8598
NB_D = 0.0889
NC_D = 0.0513
Phase 3 (sinusförmig)
omega = 0.0071
```