Aufgabe: Zeigen Sie anhand des relativistischen Dopplereffekts, daß sich die Galaxien im Ruhesystem der Singularität auf diese zubewegen und das Weltall sich zusammenzieht.

Beweis: Das gestrichene System sei die relativ zur Licht aussendenden Galaxie (in der Singularität) mit der Geschwindigkeit v von dieser wegbewegte Galaxis. Die Periodendauer des Senders, die wir direkt an der Zeitachse ablesen können, sei dann T. Deren Kehrwert ist die Frequenz $\nu = 1/T$. Die Empfangsereignisse auf der Weltlinie des Empfängers verhalten sich somit wie in Abb. 1 dargestellt.

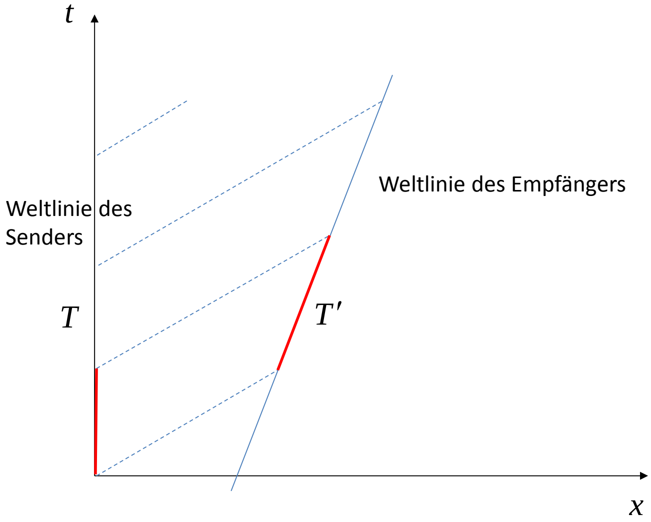

Abbildung 1. Weltlinien des Senders und eines Empfängers, der sich vom Sender wegbewegt

Um T' und daraus ν' zu berechnen, verschieben wir die Weltlinie des Empfängers so, daß sie mit dem Sendeereignis zusammenfällt. Das ist in Abb. 2 dargestellt.

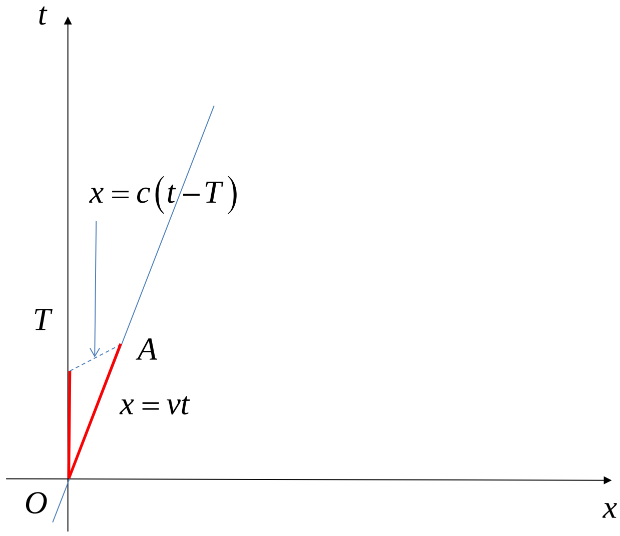

Abbildung 2. Verschieben der Weltlinien so, daß beide durch den Ursprung gehen

Die Geradengleichungen der Weltlinien des Senders und des Empfängers lauten

$$x = c\left(t - T\right) \quad \text{und} \quad x = vt.$$

Setzen wir die beiden Größen gleich, d.h. $c\left(t - T\right) = vt,$ und lösen nach t auf, erhalten wir den Zeitpunkt, zu dem das Ereignis im Inertialsystem des Senders, d.h. im Ruhesystem der Singularität, im Punkt A stattfindet:

$$t = \frac{cT}{c - v}.$$

Um das Eigenzeitintervall zwischen A und O zu berechnen, wenden wir die Formel für die Zeitdilatation an und setzen die Zeit t in diesen Ausdruck ein:

$$T' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{T}{1 - \frac{v}{c}}\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)} = T\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Drücken wir nun noch die Periodendauern durch ihre Kehrwerte

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \text{bzw.} \quad \nu' = \frac{1}{T'}$$

aus, so folgt für die Frequenz im gestrichenen System, also auf der Erde bzw. in unserer Galaxis, eine Rotverschiebung

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \leq \nu.$$

Entscheidend dafür, ob sich das All ausbreitet oder zusammenzieht, ist aber die Frequenz im Ruhesystem des Senders, also in der Singularität, und diese lautet

$$\nu = \nu'\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \geq \nu',$$

womit wir im System der Singularität eine Blauverschiebung erhalten.

Würden sich die Galaxien im bewegten System unserer Galaxis auf uns zubewegen (siehe Abb. 3), sähe die Sache anders aus. Dann wäre nämlich $c\left(t - T\right) = -vt$ und die Zeit im System des Senders würde sich verkürzen, d.h.

$$t = \frac{cT}{c + v}.$$

Die gleiche Rechnung im gestrichenen Bezugssystem unserer Galaxis sähe dann wie folgt aus:

$$T' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{T}{1+\frac{v}{c}}\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)} = T\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}},$$

und nach Einsetzen der Frequenzen hätten wir im gestrichenen System, also auf der Erde bzw. in unserer Galaxis, eine Blauverschiebung,

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \geq \nu.$$

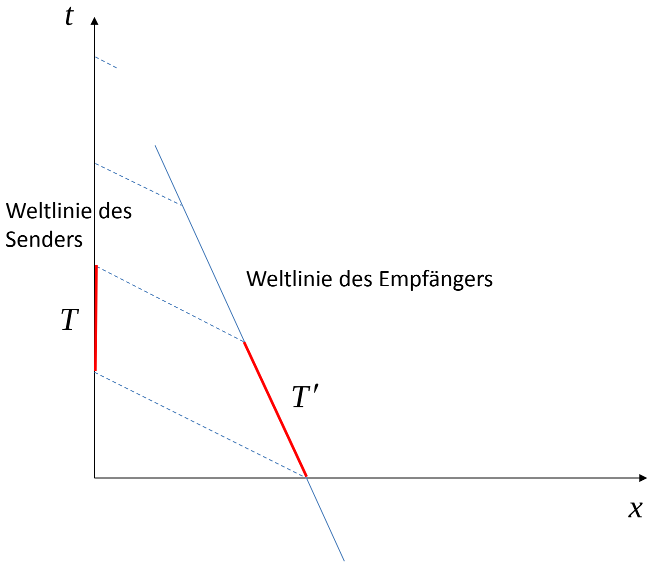

Abbildung 3. Weltlinien des Senders und eines Empfängers, der sich zum Sender hinbewegt

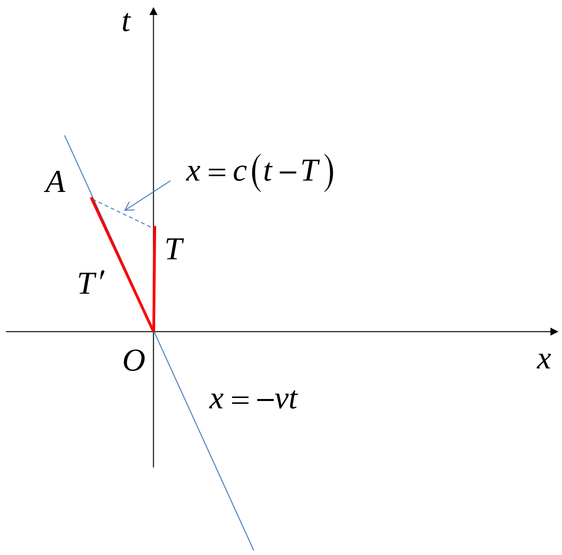

Abbildung 4. Verschieben der Weltlinien so, daß beide durch den Ursprung gehen

Im Ruhesystem der Singularität, in dem wir nicht beobachten können,[1] entspräche das einer Rotverschiebung und das Weltall würde sich ausdehnen, was aber nicht der Fall sein kann,

qed

Anmerkung: Einstein kannte den Begriff der Singularität noch nicht. Er nahm daher an, daß alle Systeme relativ zueinander gleichwertig seien. Es gibt aber zumindest ein ausgezeichnetes System, in dem das nicht der Fall ist, das ist das mit dem Gravitationszentrum verbundene unendlicher Raumkrümmung. Hier nämlich hört die Relativität auf.

[1] Die entferntesten Galaxien, die annähernd Lichtgeschwindigkeit erreichen, befinden sich, wenn auch nicht in, so doch näher an der Singularität als unsere Galaxis.

