

**Aufgabe:** Leiten Sie die Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen einer DIRCM-Laserzielverfolgungseinrichtung gegen IR-gelenkte Flugkörper vom Typ IRIS-T her, die z.B. gegen ein Kampfflugzeug wie den Eurofighter gerichtet sind.

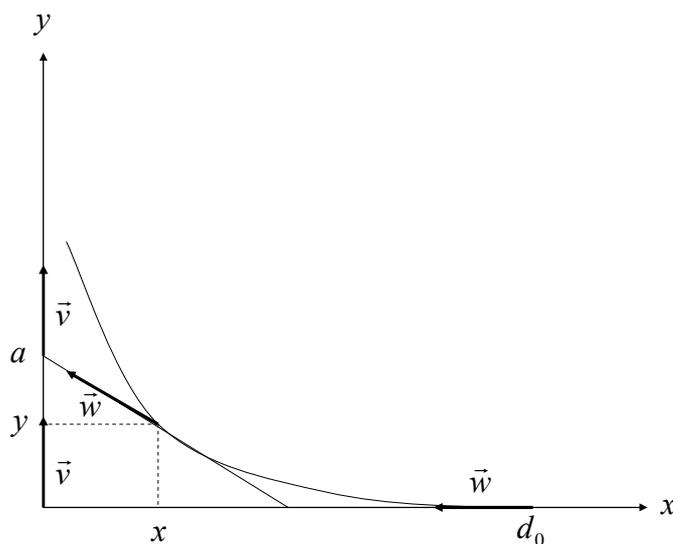
**Lösung:** Die Bahngleichung des verfolgenden Lenkflugkörpers werde als Radiodrome angenommen, bei der die Flugkörperlängsachse immer auf das Ziel ausgerichtet ist:

$$y(x) = \frac{d_0}{2} \left( \frac{1 - (x/d_0)^{1-k}}{1-k} - \frac{1 - (x/d_0)^{1+k}}{1+k} \right).$$

Darin ist  $k = v/w$  das Geschwindigkeitsverhältnis von Flugzeug zu Lenkflugkörper und  $d_0$  der Ort der entdeckten Missile zur Zeit  $t = 0$ . Am Ort  $x = 0$  bzw.  $x = d_0$  gilt

$$y(0) = \frac{k}{1-k^2} d_0 \quad \text{und} \quad y(d_0) = 0.$$

Als Entdeckungsentfernung  $d_0$  werde eine Entfernung von 5000 m angenommen.



**Abbildung 1. Schematische Darstellung der Zielverfolgung auf einer Radiodrome**

In bezug auf die Geschwindigkeiten werden folgende Annahmen getroffen:

Schallgeschwindigkeit: 1235 km/h (Mach 1)

Maximalgeschwindigkeit  $v$  des Eurofighters: Mach 2

Geschwindigkeit  $w$  des Flugkörpers IRIS-T: Mach 3

Daraus folgt für die Rechnung  $k = 2/3$ . Die Anfangsbedingungen der Bewegung für die beiden Luftfahrzeuge werden wie folgt gewählt: Eurofighter zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Koordinatenursprung  $x = y = 0$  mit Bewegung in y-Richtung mit konstanter Geschwindigkeit. Das Weg-Zeit-Gesetz der Flugzeugbewegung lautet:

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{e}_y \quad \text{mit} \quad a = vt.$$

Entsprechend lautet das Weg-Zeit-Gesetz für den Flugkörper, das allerdings analytisch nicht darstellbar ist. Auch die Weglänge des Flugkörpers

$$l = wt = \int_{d_0}^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

ist nur numerisch integrierbar. Möglich ist folgendes: Wenn die Steigung

$$b(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y-a}{x}$$

einer Geraden mit dem Durchstoßpunkt  $a = vt$  durch die  $y$ -Achse gleich der Tangente

$$y'(x) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x}{d_0} \right)^k - \left( \frac{x}{d_0} \right)^{-k} \right)$$

an die Bahnkurve ist, so ist derjenige Ort  $(x, y)$  gefunden, an dem sich der Flugkörper zum Zeitpunkt  $t$  befindet. Wie in der Abbildung gezeigt, ist die Steigung im Punkt  $x = 0$  unendlich gleich Null und im Punkt  $x = d_0$  gleich null:

$$y'(0) = -\infty \quad \text{und} \quad y'(d_0) = 0.$$

Da die Bewegung von rechts nach links verläuft, wird die Steigung an der Polstelle negativ. Die Gleichsetzung von Steigung und Tangente führt zu dem Ausdruck

$$a = vt = kd_0 \left[ \frac{1}{1-k^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+k} \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-k} \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1-k} \right]$$

der nach  $t$  aufgelöst die Funktion

$$t = \frac{d_0}{w} \left[ \frac{1}{1-k^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+k} \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1+k} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-k} \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1-k} \right]$$

ergibt. Zum Startzeitpunkt der Bewegung gilt die Äquivalenzrelation

$$t = 0 \Leftrightarrow (1-k) \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1+k} + (1+k) \left( \frac{x}{d_0} \right)^{1-k} = 2,$$

was wiederum äquivalent zum Ort  $x = d_0$  und  $y = 0$  ist, denn aus der Bahngleichung folgt ferner

$$y(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - (x/d_0)^{1-k}}{1-k} = \frac{1 - (x/d_0)^{1+k}}{1+k} \Leftrightarrow 2k = (1+k) \left(\frac{x}{d_0}\right)^{1-k} - (1-k) \left(\frac{x}{d_0}\right)^{1+k}.$$

Zu jedem Ort  $x$  gibt es also einen Zeitpunkt  $t = t(x)$ , d.h. es gibt eine eindeutige Umkehrfunktion  $x = x(t)$ . Formen wir für gegebenes  $t$  den Ausdruck  $t = t(x)$  entsprechend um und definieren eine implizite Funktion

$$f(x) = (1-k) \left(\frac{x}{d_0}\right)^{1+k} + (1+k) \left(\frac{x}{d_0}\right)^{1-k} + \frac{wt}{d_0} - 2 = 0,$$

kann deren Lösung nur numerisch durch ein Nullstellenverfahren gefunden werden.

Die erste und zweite Ableitung dieser Funktion ist gegeben durch

$$f'(x) = \frac{1-k^2}{d_0} \left[ \left(\frac{x}{d_0}\right)^k + \left(\frac{x}{d_0}\right)^{-k} \right]$$

bzw.

$$f''(x) = \frac{k(1-k^2)}{d_0^2} \left[ \left(\frac{x}{d_0}\right)^{k-1} - \left(\frac{x}{d_0}\right)^{-k-1} \right].$$

Für den Startwert  $x^{(0)}$  muß  $|f''(x^{(0)}) \cdot f(x^{(0)})| < |f'(x^{(0)})|^2$  gelten. Die Iterationsfolge wird dann nach der Vorschrift

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \frac{f(x^{(m)})}{f'(x^{(m)})}, \quad f'(x^{(m)}) \neq 0$$

gebildet. Mit  $x^{(0)} = d_0$  gilt

$$f(x^{(0)}) = \frac{wt}{d_0}, \quad f'(x^{(0)}) = \frac{2(1-k^2)}{d_0}, \quad f''(x^{(0)}) = 0,$$

und damit ist die Voraussetzung für Konvergenz wegen  $|f'(x^{(0)})| > 0$  identisch erfüllt.

Aus der Steigung an die Radiodrome

$$y' = \tan \varphi = \frac{y-a}{x}$$

für den so erhaltenen Wert von  $x$  und den zugehörigen Wert von  $y$  gemäß Bahnkurve erhalten wir den Winkel

$$\varphi = \arctan \frac{y-a}{x}$$

und daraus die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , d.h. die Drehrate der Lasernachführung mittels der Definition

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Je kürzer wir das Zeitintervall wählen, desto genauer rückt die mittlere Drehrate an die momentane Drehgeschwindigkeit heran.

Um die Missile mit dem Laser zu verfolgen, benötigen wir die Beschleunigungen  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die Beschleunigungen des Flugzeugs seien null. Differenzieren wir  $t$  nach  $x$ , so erhalten wir

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2w} \left[ \left( \frac{x}{d_0} \right)^k + \left( \frac{x}{d_0} \right)^{-k} \right]$$

bzw.

$$\dot{x} = -\frac{2w}{\left( \frac{x}{d_0} \right)^k + \left( \frac{x}{d_0} \right)^{-k}}$$

Die Funktion  $x(t)$  ist nicht analytisch darstellbar. Wegen  $w = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  gilt

$$\dot{y} = \sqrt{w^2 - \dot{x}^2}$$

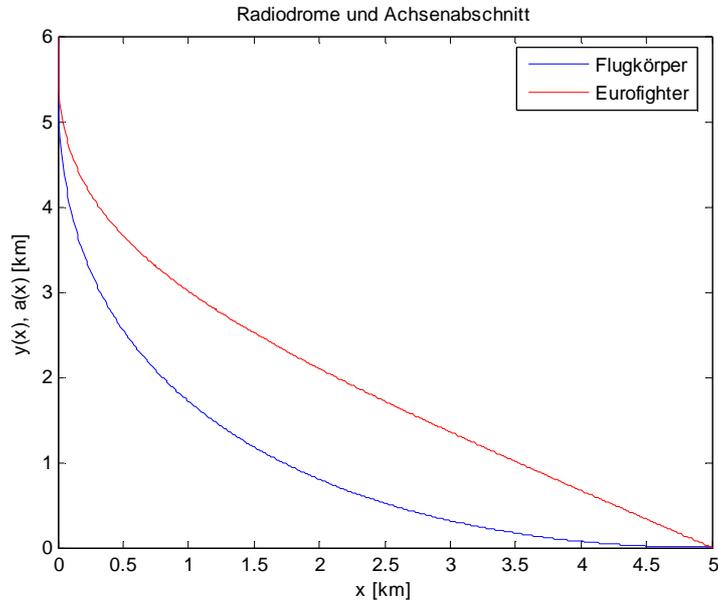
Die zweiten zeitlichen Ableitungen der Bahnbewegung lauten

$$\ddot{x} = \frac{2v\dot{x} \left( \frac{x}{d_0} \right)^{k-1} - \left( \frac{x}{d_0} \right)^{-k-1}}{d_0 \left[ \left( \frac{x}{d_0} \right)^k + \left( \frac{x}{d_0} \right)^{-k} \right]^2}$$

und

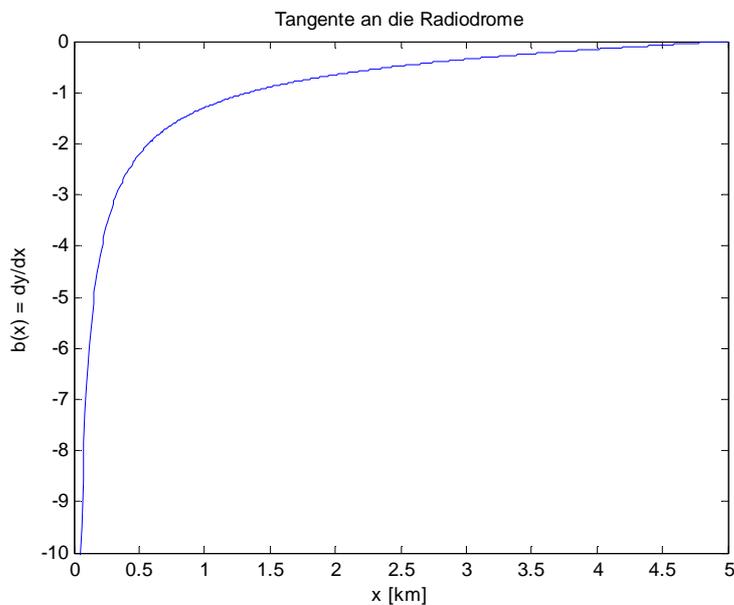
$$\ddot{y} = -\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\sqrt{w^2 - \dot{x}^2}}$$

Eine Zerlegung der Flugkörpereigenbewegung in Radial- und Transversalkomponenten ist unnötig, weil der Flugkörper definitionsgemäß keine Linearbeschleunigung aufweisen soll. Dabei zeigt es sich, daß der IR-gelenkte Flugkörper IRIS-T auf dieser Bahn ein Lastvielfaches von ca. 25 g nicht überschreitet. Nicht untersucht wurde, wie sich die Beschleunigungen ändern, wenn der Flugkörper schräg von vorne anfliegt. Um das herauszufinden, müßte noch eine Koordinatentransformation durchgeführt werden.



**Abbildung 2. Bahnkurve eines IR-gelenkten Flugkörpers bei der Verfolgung eines Eurofighters und y-Koordinate des Eurofighters als Funktion der Bahnkoordinate x des Lenkflugkörpers**

Gemäß Abbildung 2 erfolgt der Treffer in einem Abstand von 6 km auf der y-Achse.

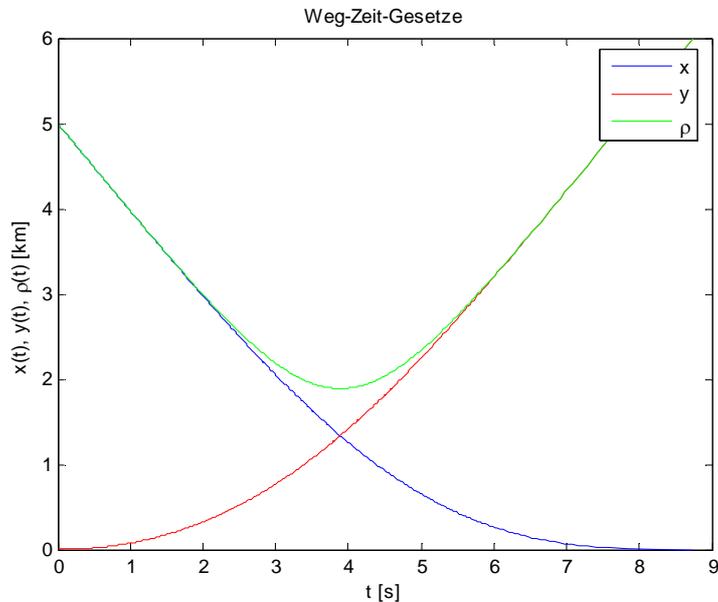


**Abbildung 3. Tangente an die Flugbahn eines IR-gelenkten Lenkflugkörpers als Funktion seiner Bahnkoordinate in x-Richtung**

Die Größen  $a(x)$  gemäß Abbildung 2 und  $b(x)$  gemäß Abbildung 3 definieren eine Gerade

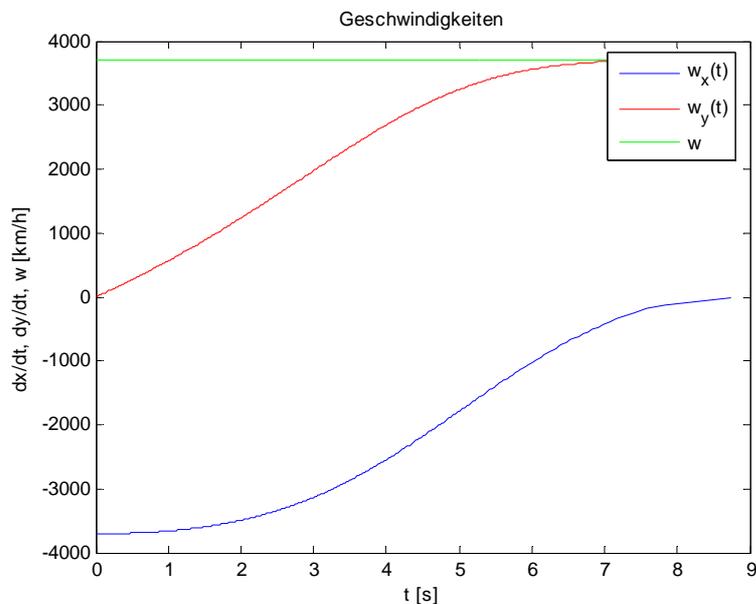
$$y(x) = a(x) + b(x) \cdot x$$

welche Tangente an die Bahnkurve ist und damit die optische Achse der Lasernachführung.



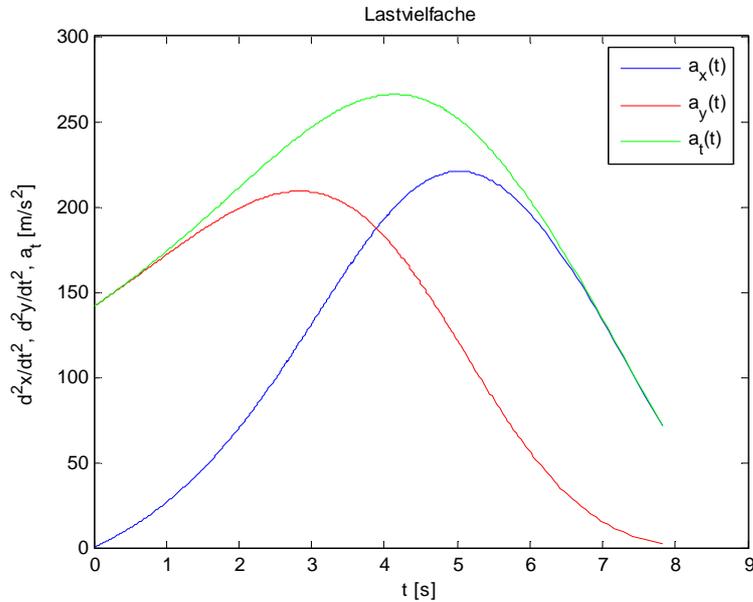
**Abbildung 4. Komponenten-Weg-Zeit-Gesetze und Flugbahn-Weg-Zeit-Gesetz eines IR-gelenkten Lenkflugkörpers**

Gemäß Abbildung 4 erfolgt die größte Annäherung, d.h. der Treffer, nach 8,7 s. Der Zeitpunkt  $t = 4$  s markiert die größte Annäherung an den Koordinatenursprung.



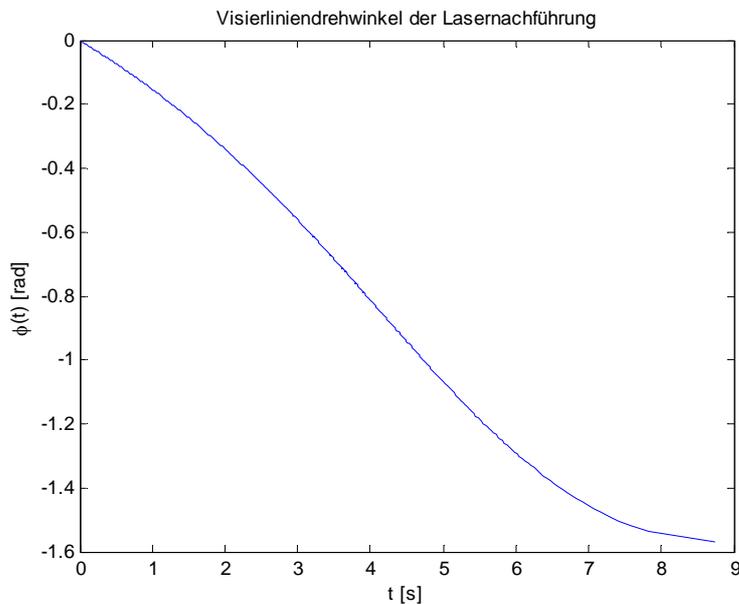
**Abbildung 5. Geschwindigkeits-Zeit-Gesetze der Komponenten und der Flugbahn eines IR-gelenkten Lenkflugkörpers**

Laut Abbildung 5 addieren sich die beiden Geschwindigkeitskomponenten zu einer konstanten Bahngeschwindigkeit von Mach 3. Zur Zeit  $t = 0$  zeigt der Vektor der Bahngeschwindigkeit in die negative  $x$ -Richtung. Bei etwa 4 s weist insbesondere die  $x$ -Komponente einen Wendepunkt auf.



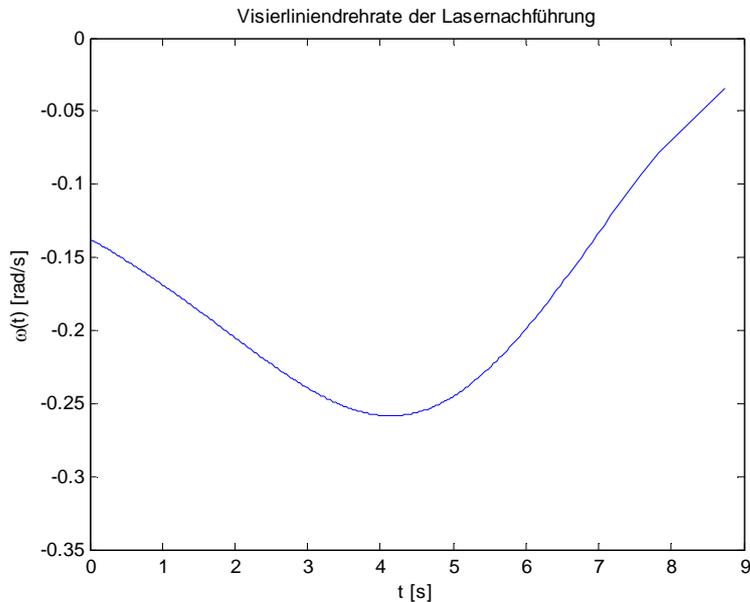
**Abbildung 6. Beschleunigungs-Zeit-Gesetze der Komponenten und der Bahn eines IR-gelenkten Flugkörpers**

Die aus den Komponentenbeschleunigungen zusammengesetzte Tangentialbeschleunigung in azimuthaler Richtung (die Linearbeschleunigung ist null) beträgt nach Abbildung 6 ca. 25 g.



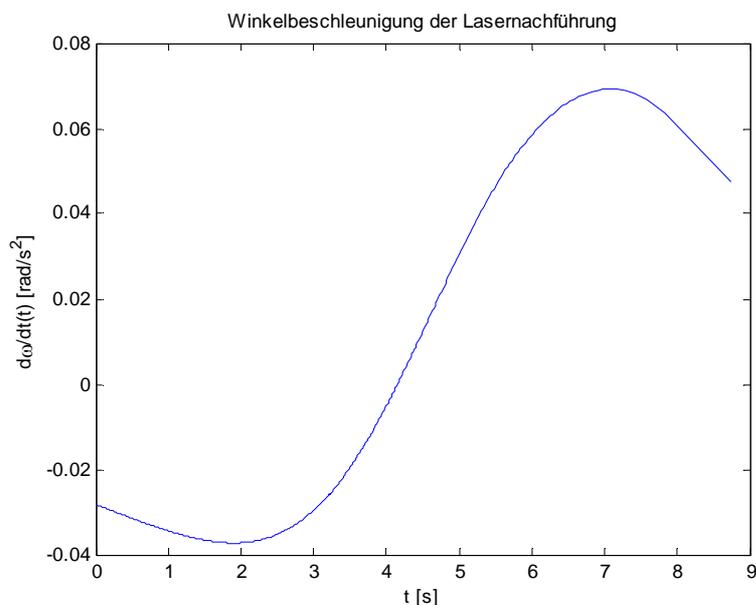
**Abbildung 7. Visierliniendrehwinkel der Lasernachführung bei seitlichem Angriff eines IR-gelenkten Flugkörpers auf einen Eurofighter**

Die Visierlinie der Lasernachführung muß gegen seitliche angreifende IR-Flugkörper gemäß Abbildung 7 von  $0^\circ$  seitlich bis  $-90^\circ$  nach hinten drehen können. Daß IR-Flugkörper immer nur von vorne angreifen, ist eine Wunschvorstellung, die in der Realität nicht vorkommt.



**Abbildung 8. Drehrate der Lasernachführung bei seitlichem Angriff eines IR-gelenkten Flugkörpers auf einen Eurofighter**

Die maximale Drehrate im Azimut tritt gemäß Abbildung 8 bei etwa 4 Sekunden auf und beträgt ca. 14,3 °/s. Die Drehrate in Elevation ist in der gewählten Anordnung gleich null.



**Abbildung 9. Winkelbeschleunigung der Lasernachführung bei seitlichem Angriff eines IR-gelenkten Flugkörpers auf einen Eurofighter**

Die azimutale Winkelbeschleunigung der Lasernachführung über die gesamte Flugbahn übersteigt in der gewählten Konfiguration keine 70 mrad/s<sup>2</sup>. In Elevation treten bei der gewählten Konfiguration überhaupt keine Winkelbeschleunigungen auf. Wie in Abbildung 9 zu erkennen, treten die Extremalwerte bei ca. 2 und 7 s auf. Der Vorzeichenwechsel bzw. Nulldurchgang erfolgt im Maximum der Drehrate bei etwa 4 s.