

Physikaufgabe 109

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Begründen Sie, warum ein weiterer Urknall folgen muß, wenn das kollabierende Weltall annähernd Lichtgeschwindigkeit erreicht hat.

Beweis: Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4 + m^2 \mathbf{v}^2 c^2,$$

wobei E die Energie, m_0 die Ruhemasse, \mathbf{v} die Geschwindigkeit und $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ der Impuls des Weltalls der Masse

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

sind. Wir nehmen im folgenden die Masse des Universums als punktförmig in einer Singularität konzentriert an und beschleunigen diese mit konstanter Beschleunigung a auf einer massebelegten Sphäre um den Nullpunkt isotrop in alle Raumrichtungen.¹ Nach den Regeln der Speziellen Relativitätstheorie nimmt dabei die Masse entsprechend der Gleichung

$$\dot{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v\dot{v}}{c^2}$$

zu, wobei die Geschwindigkeit v mit der Eigenzeit τ und der Lichtgeschwindigkeit c nach der Relation $v = c \tanh(a\tau/c)$ zusammenhängt.² Die Eigenzeit eines Betrachters auf der Oberfläche der Sphäre ist mit der Zeit t eines Betrachters in der Singularität gemäß der Lorentz-Transformation

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

verknüpft. Vernachlässigen wir Geschwindigkeitsänderungen im Intervall $d\tau$, so lautet diese in differentieller Form

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tanh^2 \frac{a\tau}{c}}} = \cosh \frac{a\tau}{c} d\tau.$$

¹ Anschließend kehren wir den Prozeß um und zeigen, daß sich das Weltall zusammenzieht.

² Strenggenommen müßten wir eine Lösung der Einsteinschen Gleichungen aus der Allgemeinen Relativitätstheorie verwenden.

Physikaufgabe 109

Daraus folgt durch Integration der zeitliche Zusammenhang zwischen einem Beobachter in der Singularität und einem fiktiven Kosmonauten am Rande des Weltalls, für den die Eigenzeit τ vergangen ist:

$$t = \frac{c}{a} \sinh \frac{a\tau}{c}.$$

Nach Umformung substituieren wir den Ausdruck

$$\frac{a\tau}{c} = \operatorname{arsinh} \frac{at}{c}$$

in der Formel $v = c \tanh(a\tau/c)$ und finden schließlich die Zeitabhängigkeit der beschleunigten Ausbreitung des Alls in der Geschwindigkeit

$$v = c \tanh \operatorname{arsinh} \frac{at}{c} = c \frac{\sinh \operatorname{arsinh} \frac{at}{c}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \operatorname{arsinh} \frac{at}{c}}} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}},$$

die für kleine Zeiten in den klassischen Ausdruck $v = at$ übergeht. Die Ableitung dieser Geschwindigkeit ergibt die relativistische Beschleunigung

$$\dot{v}(t) = \frac{a + \frac{a^3 t^2}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}^3} - \frac{\frac{a^3 t^2}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}^3} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}^3},$$

womit

$$\frac{v\dot{v}}{c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}^3} = \frac{\frac{a^2 t}{c^2}}{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^2}.$$

Mit

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\frac{a^2 t^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}$$

erhalten wir

Physikaufgabe 109

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{\frac{a^2 t^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} = \frac{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - \frac{\frac{a^2 t^2}{c^2}}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} = \frac{1}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}$$

und damit die Massenänderung

$$\dot{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v \dot{v}}{c^2} = \frac{m}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{a^2}{c^2} \frac{t}{\left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right)^2} = \frac{m_0}{c^2} \frac{a^2 t}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{m_0 a v}{c^2}.$$

Sie ist null für $v=0$ und $m_0 a/c$ für $v=c$.³ Eliminieren wir in der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung die Ruhemasse gemäß $m_0 = m \sqrt{1 - v^2/c^2}$, wird diese zu

$$E^2 = m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^4 + m^2 v^2 c^2.$$

Für $v=0$ ergibt sich daraus die Ruhenergie des Weltalls $E^2 = m_0^2 c^4$ und für $v=c$ die Einsteinsche Energie-Masse-Relation $E^2 = m^2 c^4$, die mit zunehmender Geschwindigkeit gegen Unendlich strebt. Es ist anzunehmen, daß der Urknall dann passiert, wenn der maximale Wert knapp erreicht ist.

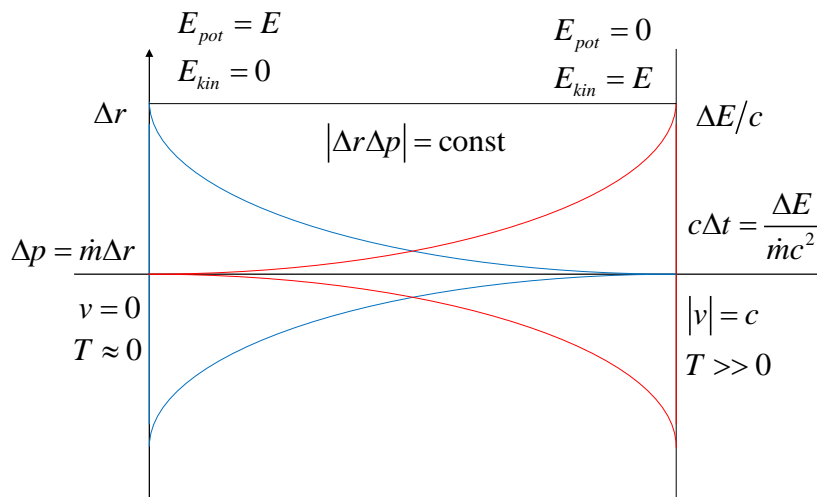


Abbildung 1. Kontraktion der Raumzeit (blau) und Expansion der Impulsenergie (rot) des Universums (schematisch)

Sei $E = \dot{E}t$ der zeitliche Verlauf der Energie, dann ist die Energieänderung gegeben durch

$$\frac{\Delta E}{c} = \frac{\dot{E}}{c^2} c \Delta t = \dot{m} c \Delta t = \frac{m_0 a v}{c} \Delta t.$$

³ Für negative Geschwindigkeiten und negative Beschleunigungen ist die Massenänderung stets positiv.

Physikaufgabe 109

Mit dem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ und seiner zeitlichen Ableitung $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}}$ sind die Schwankungen des Impulselements gegeben durch $\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v}\Delta t = \dot{m}\Delta\mathbf{r}$. Die vierdimensionalen Differenzen des Linienelements $\Delta\mathbf{s}$ und des Impulselements $\Delta\mathbf{q}$ lauten damit wie folgt:

$$\Delta\mathbf{s} = (c\Delta t, i\Delta\mathbf{r}) = (c\Delta t, i\Delta x, i\Delta y, i\Delta z),$$

$$\Delta\mathbf{q} = \left(\frac{\Delta E}{c}, i\Delta\mathbf{p} \right) = \left(\frac{\Delta E}{c}, i\Delta p_x, i\Delta p_y, i\Delta p_z \right).$$

In Komponentenschreibweise heißt das

$$\frac{\Delta E}{c} = \dot{m}c\Delta t, \quad \Delta p_x = \dot{m}\Delta x, \quad \Delta p_y = \dot{m}\Delta y, \quad \Delta p_z = \dot{m}\Delta z.$$

Mit $\Delta s \equiv |\Delta\mathbf{s}|$ und $\Delta q \equiv |\Delta\mathbf{q}|$ bedeutet dies in einer lichtartigen Welt

$$\Delta q^2 = \frac{\Delta E^2}{c^2} - (\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2) = \dot{m}^2 (c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)) = 0,$$

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \frac{1}{\dot{m}^2} \left(\frac{\Delta E^2}{c^2} - (\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2) \right) = 0,$$

d.h. Raumzeit und Impulsenergie sind bis auf eine Konstante identisch und zueinander reziprok.⁴ Mit $\Delta r \equiv |\Delta\mathbf{r}|$ und $\Delta p \equiv |\Delta\mathbf{p}|$ folgt

$$\Delta p^2 = (\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2) = \frac{\Delta E^2}{c^2},$$

$$\Delta r^2 = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = c^2\Delta t^2.$$

Somit können wir in drei Dimensionen schreiben:

$$\Delta r = c\Delta t, \quad \Delta p = \Delta E/c,$$

wobei sich die infinitesimalen Elemente auch ausdrücken lassen durch

$$\Delta q^2 = \frac{\Delta E^2}{c^2} \left(1 - c^2 \left[\left(\frac{\Delta p_x}{\Delta E} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p_y}{\Delta E} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p_z}{\Delta E} \right)^2 \right] \right) = \frac{\Delta E^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \equiv \frac{\Delta \mathcal{E}^2}{c^2},$$

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)^2 \right] \right) = c^2\Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \equiv c^2\Delta \tau^2.$$

Dabei ist $1/u$ die reziproke Geschwindigkeit, die definiert ist durch

⁴ Im engeren Sinne bezeichnen wir die Impulsenergie als reziproken Raum.

Physikaufgabe 109

$$\frac{1}{u^2} \equiv \frac{1}{v_x^2} + \frac{1}{v_y^2} + \frac{1}{v_z^2} = \left(\frac{\Delta p_x}{\Delta E} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p_y}{\Delta E} \right)^2 + \left(\frac{\Delta p_z}{\Delta E} \right)^2,$$

und ε die Eigenenergie, also das energetische Pendant zur Eigenzeit τ . Wir erhalten also das Ergebnis

$$\Delta s = c\Delta\tau, \quad \Delta q = \Delta\varepsilon/c,$$

d.h. in lichtartigen Welten ändern sich weder Eigenzeit noch Eigenenergie und es gilt

$$\Delta\tau = \Delta\varepsilon = 0.$$

Die differentiellen Weg- und Impulselemente müssen verschwinden:

$$\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{q} = \Delta E \Delta t - (\Delta x \Delta p_x + \Delta y \Delta p_y + \Delta z \Delta p_z) = \Delta E \Delta t - \Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{p} = 0.$$

Beim Weltall können wir annehmen, daß die radiale Ausbreitung in Richtung wachsenden Impulses erfolgt und der Kosinus des eingeschlossenen Winkels gleich 1 ist, so daß

$$\Delta E \Delta t = \Delta r \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Setzen wir die Ausdrücke

$$\Delta E = \dot{m}c^2 \Delta t, \quad \Delta p = \dot{m} \Delta r$$

in den Grundzustand der Unschärferelation ein, so folgen daraus die scharf meßbaren Größen

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= \frac{\dot{m}c^2 \hbar}{2}, & \Delta p^2 &= \frac{\dot{m} \hbar}{2}, \\ \Delta t^2 &= \frac{\hbar}{2\dot{m}c^2}, & \Delta r^2 &= \frac{\hbar}{2\dot{m}}. \end{aligned}$$

Fügen wir nun noch die oben berechnete Massenänderung ein, ergeben sich folgende Abhängigkeiten:

$$\Delta E^2 = c^2 \Delta p^2 = \frac{m_0 a v \hbar}{2}, \quad \Delta t^2 = \frac{\Delta r^2}{c^2} = \frac{\hbar}{2m_0 a v}.$$

Nach obiger Energie-Impuls-Beziehung startet das Weltall mit der Geschwindigkeit $v=0$, d.h.

$$E^2 = m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^4 + m^2 v^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Wegen $\Delta E = \Delta p = 0$ befindet sich der reziproke Raum dann in einer Singularität, während der dreidimensionale Raum nahezu unendlich ausgedehnt und bereits völlig aufgespannt ist. Der

Physikaufgabe 109

Raum kann also nicht unendlich werden, weil die Lichtgeschwindigkeit nicht exakt erreicht werden kann.

Hat das All annähernd Lichtgeschwindigkeit erreicht, lautet die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \lim_{v \rightarrow c} \left[m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^4 + m^2 v^2 c^2 \right] = m^2 c^4$$

und das Weltall wird aufgrund seiner nahezu unendlichen Masse instabil. Die nun folgenden Energie- und Zeitänderungen sind im Grundzustand gegeben durch

$$\Delta E^2 = c^2 \Delta p^2 = \frac{m_0 a c \hbar}{2}, \quad \Delta t^2 = \frac{\Delta r^2}{c^2} = \frac{\hbar}{2 m_0 a c}.$$

Wenn die Energieumwandlung komplett vollzogen ist, verschwindet der vierdimensionale Raum in einer Singularität. Danach beginnt der Lebenszyklus des Universums von neuem.⁵

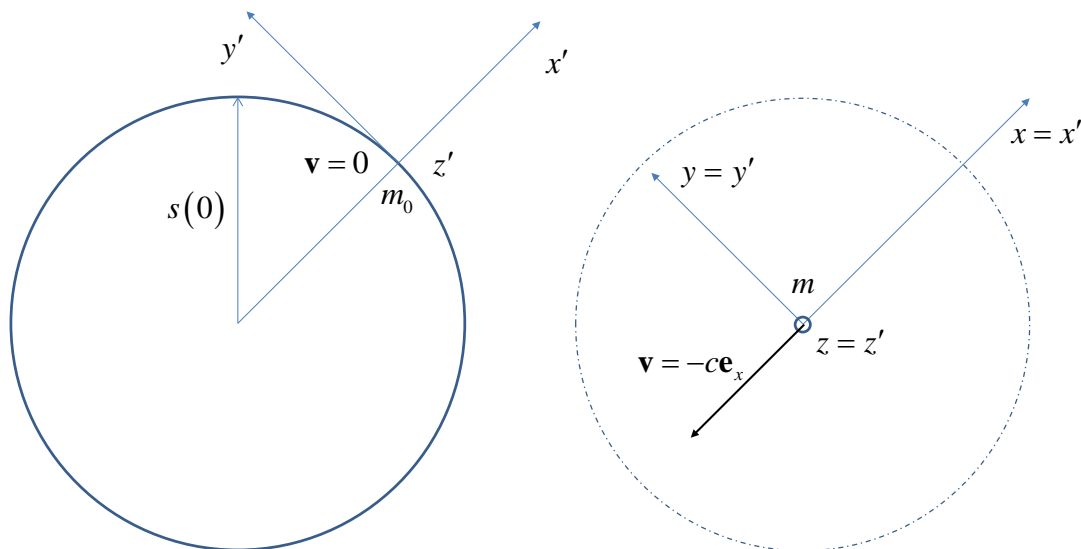


Abbildung 2. Das Universum bei voller Ausdehnung (links) und am Ende seines Lebenszyklus (rechts)

Es werden nun zwei Bezugssysteme betrachtet (siehe Abb. 2), von denen das eine⁶ das Ruhesystem der Singularität ist und das andere⁷ eine bewegte Sphäre im Abstand s von der Singularität, welche anfangs mit dem Ereignishorizont übereinstimmt und die gesamte Ruhemasse des Universums in sich vereint. Diese massebelegte Oberfläche werde als Punktmasse betrachtet und möge sich im Gravitationsfeld quasi im freien Fall mit der konstanten Beschleunigung $a < 0$ auf die Singularität zubewegen. Die Bewegung erfolge in radialer Raumrich-

⁵ Möglicherweise, und wenn nicht, dann irgendwann, wieder in genau der gleichen Konfiguration wie das abgelaufene

⁶ das ungestrichene

⁷ das gestrichene

Physikaufgabe 109

tung, so daß wir das Weg-Zeit-Gesetz durch Integration der Geschwindigkeit ableiten können. Wegen der negativen Geschwindigkeit gilt für den Weg

$$s(t) = -\int_0^t v(t) dt = \int_0^t \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} dt.$$

Die Integration ergibt

$$s(t) = \frac{c^2}{a} \int_0^{\frac{at}{c}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Substituieren wir die Beschleunigung durch die Geschwindigkeit, können wir den Weg⁸ direkt in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angeben:

$$s = \frac{c^2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

In der Näherung für kleine Geschwindigkeiten kurz nach dem Urknall gilt die Näherung

$$\frac{as}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

und es folgt das klassische Ergebnis $v = -\sqrt{2as}$, falls v negativ ist. Für $v = 0$ kurz nach dem Urknall hat das All wegen $s = 0$ noch keinen Weg zurückgelegt bzw. es ist noch nicht merklich geschrumpft.

Im allgemeinen Fall lösen wir die obige Gleichung nach v auf und erhalten

$$v = -\frac{\sqrt{2as}}{1 + \frac{as}{c^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{as}{c^2}}.$$

Im Falle $as \gg c^2$, das heißt, wenn sich das All sehr stark zusammengezogen hat und der Betrag des Weges s in Richtung Singularität sehr groß geworden ist oder wenn die Beschleunigung a aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie extreme Werte angenommen hat, gilt näherungsweise

$$v \approx -c^2 \frac{\sqrt{2as}}{as} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{as}{c^2}} = -c.$$

⁸ Man beachte, daß der Weg negativ ist, da er vom Rand des Universums zurück in die Singularität führt.

Physikaufgabe 109

Man kann dieses Verhalten auch anhand der differentiellen Linienelemente für Raumzeit und Impulsenergie demonstrieren. Dazu stellen wir diese in ihrer nicht gekoppelten Form als Produkte ihrer Lösungen dar, d.h.

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = (c\Delta t + \Delta r)(c\Delta t - \Delta r) = 0,$$
$$\Delta q^2 = \frac{\Delta E^2}{c^2} - \Delta p^2 = \left(\frac{\Delta E}{c} + \Delta p\right)\left(\frac{\Delta E}{c} - \Delta p\right) = 0.$$

Multiplizieren wir die beiden Linienelemente miteinander, so ist

$$\Delta s^2 \Delta q^2 = (c\Delta t + \Delta r)\left(\frac{\Delta E}{c} - \Delta p\right)(c\Delta t - \Delta r)\left(\frac{\Delta E}{c} + \Delta p\right) = 0.$$

Ausmultipliziert heißt das

$$\Delta s^2 \Delta q^2 = \left(\Delta t \Delta E - \Delta r \Delta p + \Delta r \frac{\Delta E}{c} - c \Delta t \Delta p\right)\left(\Delta t \Delta E - \Delta r \Delta p - \Delta r \frac{\Delta E}{c} + c \Delta t \Delta p\right) = 0,$$

und nach Kürzen von

$$\Delta t \Delta E - \Delta r \Delta p = 0$$

geht dieser Ausdruck über in

$$\Delta s^2 \Delta q^2 = \left(c \Delta t \Delta p - \Delta r \frac{\Delta E}{c}\right)\left(\Delta r \frac{\Delta E}{c} - c \Delta t \Delta p\right) = 0.$$

Daraus folgt

$$\Delta r \frac{\Delta E}{c^2} - \Delta t \Delta p = 0$$

und mit $\Delta m = \Delta E/c^2$ die Unschärferelation zwischen Masse und Raum

$$\Delta r \Delta m = \Delta t \Delta p \geq \frac{\hbar}{2c}.$$

Wenn also die Masse zunimmt, muß sich der Raum zwangsläufig verkleinern. Dann und nur dann gilt

$$c\Delta t + \Delta r = 0 \quad \text{bzw.} \quad c\Delta t = -\Delta r \leq 0.$$

Würde sich der Raum umgekehrt immer weiter ausdehnen und die Geschwindigkeit immer weiter verlangsamen, würde die Masse immer kleiner und die Lösung des differentiellen Wegelements wäre

$$c\Delta t - \Delta r = 0 \quad \text{bzw.} \quad c\Delta t = \Delta r \geq 0,$$

Physikaufgabe 109

was zu keinem weiteren Urknall führen könnte und daher physikalisch unsinnig ist.⁹ Das differentielle Wegelement hat nämlich genau zwei Lösungen, und zwar Expansion und Kontraktion. Im Fall maximaler Kontraktion hätte das All dann in der Singularität als Grenzwert negative Lichtgeschwindigkeit¹⁰ angenommen,

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -c.$$

Es gibt also aufgrund der riesigen Massenzunahme in der Singularität einen weiteren Urknall,
qed

Anmerkung: Da Raum und Energie sowie Zeit und Impuls bis auf eine Proportionalitätskonstante $\dot{m}c$ völlig äquivalent zueinander sind, wird das System der beiden Differentialgleichungen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0, \quad \Delta q^2 = \frac{\Delta E^2}{c^2} - \Delta p^2 = 0$$

gelöst durch die Beziehungen

$$\Delta E = \dot{m}c \Delta r, \quad \Delta p = \dot{m}c \Delta t$$

des reziproken Raums. Somit sind die Unschärferelationen nichts anderes als Lösungen desselben relativistischen Kraftgesetzes

$$\Delta F \equiv \dot{m}c = \frac{\Delta E}{\Delta r} = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

⁹ Demnach wäre die Welt eine Einmalschöpfung, was mit den Naturgesetzen nicht im Einklang steht.

¹⁰ Die Lichtgeschwindigkeit ist hier als Skalar anzusehen, da die Unschärfen stets positiv sind.