Aufgabe: Berechnen Sie die Expansion des Alls aus der Singularität heraus. Zeigen Sie, daß die geodätischen Linien der Raumzeit konzentrische Sphären sind, deren Mittelpunkt in der Singularität liegt, und daß alle Ereignisse, die wir gegenwärtig im Universum beobachten können, lichtartig sind, und nicht aus früheren Zeiten stammen.

Lösung: Albert Einstein beschrieb 1917 ein statisches Universum, und Hubble hat an ein expandierendes All nie geglaubt. Die von Einstein seit 1931 vertretene Steady-State-Theorie wurde 1965, d.h. 10 Jahre nach seinem Tod, durch die Entdeckung der von der Urknalltheorie vorausgesagten Hintergrundstrahlung widerlegt. Einstein präsentierte in seiner Allgemeinen Relativitätstheorie 10 nichtlineare Differentialgleichungen mit 16 Unbekannten. Ein solches System ist mathematisch nicht mehr lösbar. Die Friedmann-Gleichung ist nur deshalb als Lösung anzusehen, weil Friedmann erhebliche Vereinfachungen traf. Nachfolgend versuchen wir solche Vereinfachungen zu vermeiden.

Im Minkowski-Raum ist der quadratische Abstand eines Ereignisses $\mathbf{r} = (ict, \mathbf{x})$ von der Singularität $s = ct = x = y = z = 0$ gegeben durch

$$s^2 \equiv \left\| (ict, \mathbf{x}) \right\|^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

wobei wir uns auf zeit- und lichtartige Ereignisse $c^2t^2 \geq x^2 + y^2 + z^2$ beschränken wollen.[1] Allgemein gilt in der Relativitätstheorie die Invarianz des Abstandsquadrats

$$ds^2 = dct^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0,$$

was man durch Differentiation des obigen Ausdrucks leicht zeigen kann:

$$2sds = 2ctdct - 2xdx - 2ydy - 2zdz.$$

In bezug auf denselben Abstand zweier Punkte zur Singularität gilt folglich $s^2 = 0.$ Allgemein läßt sich eine zeit- und lichtartige Bewegung durchs All beginnend mit dem Urknall durch eine Hyperfläche der Gestalt

$$z(ct, x, y) = \pm\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2}$$

beschreiben, d.h. alle Weltpunkte, die auf einer Orthodromen liegen, sind gleich weit von der Singularität entfernt. Die Front eines Lichtblitzes, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung der Singularität ausgelöst wird, beschreibt demnach eine Kugelsphäre mit Radius ct, so daß die Bewegung auf einer Orthodromen stets die kürzeste Verbindung durchs Weltall ist. Diese Orthodrome kann nur verlassen werden, wenn man in die Zukunft reist, d.h. eine weiter entfernte Orthodrome mit $s > 0$ aufsucht. Dazu müssen allerdings Beschleunigungen aufgebracht werden, um die Reisegeschwindigkeit zu erhöhen. Es gibt dann auf dieser neuen Or-

[1] Raumartige Ereignisse datieren in die Vergangenheit, die uns kausal nicht zugänglich ist.

thodromen keine Möglichkeit mehr, noch einmal in die Vergangenheit und damit in seine eigene Welt zurückzukehren.

Die Größe $z = z(ct, x, y)$ stellt in kartesischen Koordinaten eine sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitende Sphäre dar. Das totale Differential des Raumzeitvektors $\mathbf{r} = \left(ict, x, y, z\right)$ der Orthodromen nach den drei unabhängigen Variablen *ct*, *x* und *y* ist folglich gegeben durch

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct} dct + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy,$$

wobei das differentielle Wegelement ds definiert ist durch

$$\begin{aligned} ds^2 \equiv d\mathbf{r}^2 = & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 dct^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dctdx + dx + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dctdy \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dxdy + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 dy^2. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten fassen wir zu einer Metrik

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right) \\ & - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \end{aligned}$$

zusammen. Mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct} = \left(i, 0, 0, \frac{\partial z}{\partial ct}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(0, 1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

sowie der Skalarprodukte

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 = 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 = 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - 1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y}$$

erhalten wir für den metrischen Tensor den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - 1 & \frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial ct} & 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial ct} & \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} & 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix},$$

und für dessen Determinante gilt

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - 1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Daraus läßt sich das differentielle Wegelement wie folgt formulieren:

$$ds^2 = (dct, dx, dy)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dct \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = (dct, dx, dy)\begin{pmatrix} g_{11}dct + g_{12}dx + g_{13}dy \\ g_{21}dct + g_{22}dx + g_{23}dy \\ g_{31}dct + g_{32}dx + g_{33}dy \end{pmatrix},$$

also

$$ds^2 = g_{11}dct^2 + (g_{12}+g_{21})dctdx + g_{22}dx^2 + (g_{23}+g_{32})dxdy + g_{33}dy^2 + (g_{31}+g_{13})dydct.$$

Setzen wir die Ableitungen in das differentielle Wegelement ein, so lautet dieses

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - 1\right]dct^2 + 2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x}dctdx + \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 \\ &+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}dxdy + \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dy^2 + 2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial ct}dydct. \end{aligned}$$

Der inverse metrische Tensor ist damit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}^{T},$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g_{11}G_{11} + g_{12}G_{12} + g_{13}G_{13}$$

und den Adjunkten

$$G_{ik} = (-1)^{i+k} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,k-1} & g_{1,k+1} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2,k-1} & g_{2,k+1} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i-1,1} & g_{i-1,2} & \cdots & g_{i-1,k-1} & g_{i-1,k+1} & \cdots & g_{i-1,n} \\ g_{i+1,1} & g_{i+1,2} & \cdots & g_{i+1,\mathrm{k}-1} & g_{i+1,k+1} & \cdots & g_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{n,k-1} & g_{n,k-1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}.$$

Diese ergeben sich aus den entsprechenden Unterdeterminanten zu

$$G_{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G_{12} = -\begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G_{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix},$$

$$G_{21} = -\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G_{22} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G_{23} = -\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix},$$

$$G_{31} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}, \quad G_{32} = -\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}, \quad G_{33} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$$

und lauten ausgeschrieben

$$G_{11} = g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}, \quad G_{12} = -g_{21}g_{33} + g_{23}g_{31}, \quad G_{13} = g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31},$$

$$G_{21} = -g_{12}g_{33} + g_{32}g_{13}, \quad G_{22} = g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31}, \quad G_{23} = -g_{11}g_{32} + g_{12}g_{31},$$

$$G_{31} = g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13}, \quad G_{32} = -g_{11}g_{23} + g_{21}g_{13}, \quad G_{33} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}.$$

Mit den Adjunkten

$$G_{11} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2, \qquad G_{12} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right),$$

$$G_{22} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2, \quad G_{23} = -\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right),$$

$$G_{33} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2, \quad G_{13} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$$

und den Symmetriebeziehungen

$$G_{21} = G_{12}, \quad G_{32} = G_{23}, \quad G_{31} = G_{13}$$

können wir den inversen metrischen Tensor auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}G_{11} + g_{12}G_{12} + g_{13}G_{13}} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Schließlich ergibt sich mit

$$G_{11} = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \qquad G_{12} = -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$G_{22} = \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1, \quad G_{23} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$G_{33} = \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 1, \quad G_{13} = -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y}$$

für den inversen metrischen Tensor die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 & -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y} \\ -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x} & \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1 & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \\ -\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} & \left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Überprüfung bilden wir das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{23}g_{31} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{31}^2 - g_{33}g_{12}^2}$$

$$\times \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}^2 & -g_{12}g_{33} + g_{32}g_{31} & g_{12}g_{23} - g_{22}g_{31} \\ -g_{12}g_{33} + g_{23}g_{13} & g_{11}g_{33} - g_{13}^2 & -g_{11}g_{23} + g_{12}g_{31} \\ g_{12}g_{23} - g_{22}g_{31} & -g_{11}g_{23} + g_{12}g_{31} & g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \end{pmatrix},$$

welches uns den Einheitstensor liefert:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Auswertung der bisherigen Größen setzen wir alle benötigten partiellen Ableitungen der Fläche

$$z = \pm\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2}$$

mit $s \neq 0$ ein,

$$\frac{\partial z}{\partial ct} = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2}},$$

womit der metrische Tensor in kartesischen Koordinaten explizit die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + s^2 & -ctx & -cty \\ -ctx & c^2t^2 - y^2 - s^2 & xy \\ -cty & xy & c^2t^2 - x^2 - s^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante gilt

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \frac{s^2}{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2},$$

und der inverse metrische Tensor ist explizit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} c^2t^2 - s^2 & ctx & cty \\ ctx & x^2 + s^2 & xy \\ cty & xy & y^2 + s^2 \end{pmatrix}.$$

Das differentielle Wegelement lautet damit

$$ds^2 = \frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dct^2 - 2\frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dctdx + \frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dx^2$$
$$+2\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dxdy + \frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dy^2 - 2\frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}dctdy.$$

Für lichtartige Ereignisse $s=0$ ist der inverse Tensor nicht definiert, daher kann man ihn auch nicht für die Berechnung der Christoffel-Symbole heranziehen. In allen anderen Fällen gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{1}{s^2}$$
$$\times\begin{pmatrix} \left(c^2t^2-x^2-y^2-s^2\right)s^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(c^2t^2-x^2-y^2-s^2\right)s^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(c^2t^2-x^2-y^2-s^2\right)s^2 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge, in die wir die erste Ableitung

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{dct}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

wieder einsetzen, erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2ct}{ds^2} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} + \left(\frac{dct}{ds}\right)^2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2} + 2\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}$$
$$+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2} + 2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2} + 2\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y\partial ct}.$$

Ferner benötigen wir die darin auftauchenden zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y\partial ct} = \left(0, 0, 0, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial ct}\right).$$

Die auf die Bogenlänge bezogene Oberflächenkurve ist dann und nur dann geodätisch, wenn die folgenden Skalarprodukte identisch verschwinden:

$$0=\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct},$$

$$0=\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x},$$

$$0=\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}+4\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}.$$

Ausmultipliziert heißt das

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\right)^2\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0.$$

Setzen wir die Skalarprodukte und die gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial t^2}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\qquad\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial x}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x},\quad\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial ct}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial ct\partial y}=\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial ct\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

in die obigen Gleichungen ein, erhalten wir Terme, die nur noch von den Ortskoordinaten abhängen:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-1\right]\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{d^2y}{ds^2}\\&+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\\&+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2ct}{ds^2}\\&+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\\&+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}\\&+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\\&+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir nach Multiplikation mit den Differentialen $\partial z/\partial ct$, $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$ auf die folgende Form bringen:

$$\frac{\partial z}{\partial ct}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2-1\right]\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{d^2x}{ds^2}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{d^2ct}{ds^2}$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}$$
$$+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}=0.$$

Ziehen wir die zweite und die dritte Gleichung von der ersten ab, erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{\partial z}{\partial ct}\left\{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}\right\}$$
$$+\frac{\partial z}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}\right\}$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left\{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-1-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}\right\}=0,$$

womit die Koeffizienten in den eckigen Klammern identisch verschwinden müssen, d.h.

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1\right]\frac{d^2ct}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1\right]\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1\right]\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}$$
$$-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}\frac{dct}{ds}\frac{dy}{ds}=0.$$

Durch Vergleich mit den geodätischen Gleichungen

$$\frac{d^2ct}{ds^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21}\right)\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\Gamma^1_{22}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^1_{23}+\Gamma^1_{32}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$$
$$+\Gamma^1_{33}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^1_{31}+\Gamma^1_{13}\right)\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21}\right)\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^2_{23}+\Gamma^2_{32}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$$
$$+\Gamma^2_{33}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^2_{31}+\Gamma^2_{13}\right)\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}=0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\Gamma^3_{11}\left(\frac{dct}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^3_{12}+\Gamma^3_{21}\right)\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\Gamma^3_{22}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^3_{23}+\Gamma^3_{32}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$$
$$+\Gamma^3_{33}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^3_{31}+\Gamma^3_{13}\right)\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}=0$$

ergeben sich die Christoffelkoeffizienten zu

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},\quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},\quad \Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{32}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^1_{33}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},\quad \Gamma^1_{31}=\Gamma^1_{13}=\frac{\frac{\partial z}{\partial ct}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^2_{22}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^2_{33}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^2_{31}=\Gamma^2_{13}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^3_{11}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1}$$

$$\Gamma^3_{22}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},$$

$$\Gamma^3_{33}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1},\quad \Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial ct}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-1}.$$

Um die Orthodrome einer vierdimensionalen Kugel auszuwerten, benötigen wir neben den ersten auch die zweiten partiellen Ableitungen einer sich ausdehnenden Kugeloberfläche[2] als Funktion von x, y und ct. Diese berechnen wir geradeaus zu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial ct^2} = -\frac{x^2+y^2+s^2}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial x} = \frac{ctx}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial ct\partial y} = \frac{cty}{\sqrt{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}^3}.$$

Setzen wir diese Resultate in die allgemeine Definition der Christoffelkoeffizienten ein, so folgt

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2}, \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2}, \quad \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = -\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2}, \quad \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13} = \frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma^2_{22} = -\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2}, \quad \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = -\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2}, \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2}, \quad \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma^3_{22} = -\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma^3_{33} = -\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2}, \quad \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2}.$$

Daraus ergeben sich drei Differentialgleichungen:

[2] Wir verwenden im weiteren Verlauf nur noch das positive Vorzeichen

$$\frac{d^2ct}{ds^2}-\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\left[\left(x^2+y^2+s^2\right)\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2ctx\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\left(c^2t^2-y^2-s^2\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2xy\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left(c^2t^2-x^2-s^2\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2cty\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}\right]\frac{ct}{s^2}=0,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\left[\left(x^2+y^2+s^2\right)\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2ctx\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\left(c^2t^2-y^2-s^2\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2xy\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left(c^2t^2-x^2-s^2\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2cty\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}\right]\frac{x}{s^2}=0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\left[\left(x^2+y^2+s^2\right)\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2ctx\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\left(c^2t^2-y^2-s^2\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2xy\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left(c^2t^2-x^2-s^2\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2cty\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}\right]\frac{y}{s^2}=0.$$

Der gemeinsame Koeffizient stellt das differentielle Abstandsquadrat dar, so daß wir die Gleichungen mit Hilfe der Identität

$$1=\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\left[\left(x^2+y^2+s^2\right)\left(\frac{dct}{ds}\right)^2-2ctx\frac{dct}{ds}\frac{dx}{ds}+\left(c^2t^2-y^2-s^2\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right.$$
$$\left.+2xy\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\left(c^2t^2-x^2-s^2\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-2cty\frac{dy}{ds}\frac{dct}{ds}\right]$$

bedeutend vereinfachen können:

$$\frac{d^2ct}{ds^2}-\frac{ct}{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}=0,\quad \frac{d^2x}{ds^2}-\frac{x}{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}-\frac{y}{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}=0.$$

Es muß also

$$\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-z^2}=\frac{1}{ct}\frac{d^2ct}{ds^2}=\frac{1}{x}\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\omega^2}{c^2}$$

konstant sein, womit die Differentialgleichungen gegeben sind durch

$$\frac{d^2ct}{ds^2}-\frac{\omega^2}{c^2}ct=0,\quad \frac{d^2x}{ds^2}+\frac{i^2\omega^2}{c^2}x=0,\quad \frac{d^2y}{ds^2}+\frac{i^2\omega^2}{c^2}y=0.$$

Das All rotiert also mit einer komplexen Rotationsfrequenz $i\omega,$ die den Betrag

$$|i\omega|=\sqrt{i\omega\cdot(-i\omega)}=\omega$$

hat. Es handelt sich bei diesem Gleichungssystem um gekoppelte harmonische Oszillatoren mit den komplexen Lösungen und Ableitungen

$$ct = \frac{c}{i\omega}\sinh\frac{\omega s}{c}, \quad \frac{dct}{ds} = \frac{1}{i}\cosh\frac{\omega s}{c}, \quad \frac{d^2ct}{ds^2} = \frac{\omega^2}{c^2}ct,$$
$$x = \frac{c}{i\omega}\cos\frac{i\omega s}{c}, \quad \frac{dx}{ds} = -\sin\frac{i\omega s}{c}, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{i^2\omega^2}{c^2}x,$$
$$y = \frac{c}{i\omega}\sin\frac{i\omega s}{c}, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\frac{i\omega s}{c}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{i^2\omega^2}{c^2}y.$$

Ferner gilt $z = ct$. Setzen wir diese Lösungen in die Definition des vierdimensionalen Abstandsquadrats ein, so folgt mit

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{i^2\omega^2}\cos^2\frac{i\omega s}{c} + \frac{c^2}{i^2\omega^2}\sin^2\frac{i\omega s}{c} = \frac{c^2}{i^2\omega^2}$$

zunächst der räumliche Beitrag

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{c^2}{i^2\omega^2} + \frac{c^2}{i^2\omega^2}\sinh^2\frac{\omega s}{c} = \frac{c^2}{i^2\omega^2}\cosh^2\frac{\omega s}{c}$$

und daraus das Abstandsquadrat

$$s^2 = c^2t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -\frac{c^2}{\omega^2}\sinh^2\frac{\omega s}{c} + \frac{c^2}{\omega^2}\cosh^2\frac{\omega s}{c} = \frac{c^2}{\omega^2}.$$

Für lichtartige Ereignisse $s = 0$, etwa den Urknall, gilt $\omega \to \infty$. Dabei verschwinden Raum und Zeit in der Singularität:

$$\lim_{\omega\to\infty} ct = \frac{d^2ct}{ds^2}\lim_{\omega\to\infty}\frac{c^2}{\omega^2} = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} x = \frac{d^2x}{ds^2}\lim_{\omega\to\infty}\frac{c^2}{\omega^2} = 0, \quad \lim_{\omega\to\infty} y = \frac{d^2y}{ds^2}\lim_{\omega\to\infty}\frac{c^2}{\omega^2} = 0.$$

Bei Lichtartigkeit gilt ferner

$$s^2 = c^2 - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = c^2 - v^2 = 0$$

und damit $v = \pm c$. Während des Urknalls besitzt das Universum bei maximaler Rotationsgeschwindigkeit wie bei der Kreisbewegung maximale Gravitationsbeschleunigung, da längs der Orthodromen Kräftegleichgewicht herrscht. Umgekehrt wird die Ausdehnung des Alls für $\omega = \omega_{\min}$ maximal und es gilt $s = s_R$. Die Expansion des Alls hat dann wegen der Krümmung des Raums und nahezu verschwindender Beschleunigungen ihren Umkehrpunkt erreicht:

$$\lim_{\omega\to\omega_{\min}}\frac{d^2ct}{ds^2} = 1{,}175\frac{\omega_{\min}}{c}, \quad \lim_{\omega\to\omega_{\min}}\frac{d^2x}{ds^2} = 1{,}543\frac{\omega_{\min}}{c}, \quad \lim_{\omega\to\omega_{\min}}\frac{d^2y}{ds^2} = 1{,}175\frac{\omega_{\min}}{c}.$$

Am Ende des Expansionsprozesses ist die Rotation des Alls somit fast zum Erliegen gekommen, die Beschleunigungen sind allesamt minimal. Trotzdem bleibt der Drehimpuls erhalten.

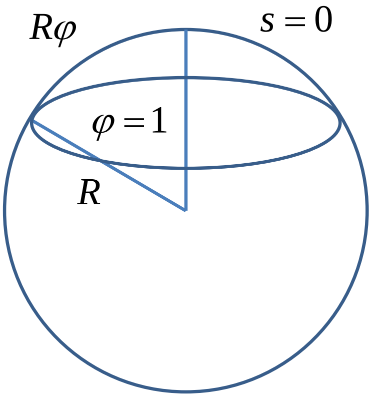

Abbildung 1. Sphären der Gleichzeitigkeit und sichtbarer Teil des Universums

Orthodromen sind Sphären mit wachsendem Radius *ct*, für die ebenfalls $s = 0$ gilt und damit

$$c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

d.h. die Welt, in der wir leben, ist lichtartig, da die Ausbreitung des Alls sowohl radial als auch azimutal mit dem Licht mitwandert. Wir können in der Gegenwart also weder in die Vergangenheit noch in die Zukunft blicken. Das Licht auf einem Kreisbogen ist 2πmal so lang unterwegs wie in radialer Raumrichtung (siehe Abb. 1). Daher sehen wir etwa auch nur ein Drittel des Universums in beiden Raumrichtungen. Was in größerer Entfernung liegt, werden wir niemals zu Gesicht bekommen. Wenn die am weitesten entfernten Galaxien 13,8 Milliarden Jahre alt sind und damit so alt sind wie das Universum, dann ist die wahre Ausdehnung des Universums ca. 3mal so groß. Alles, was wir im Universum sehen können, hat folglich dasselbe Alter seit Entstehung der Welt, da uns das Licht selbst der entferntesten Galaxien just zu der Zeit erreicht, die seit dem Urknall auf der Orthodromen verstrichen ist. Alle Punkte auf dieser Orthodromen sind gleichzeitig. Daher sehen wir die Galaxien nicht in dem Zustand, wie sie sich kurz nach dem Urknall präsentierten, sondern im gleichen Alter, das auch unsere Galaxis hat. Galaxien, die vor dem sichtbaren Horizont liegen, haben scheinbar eine kleinere Geschwindigkeit als Lichtgeschwindigkeit. Das liegt aber nur daran, daß das Additionstheorem der Geschwindigkeiten gilt,

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}},$$

wonach für $u'_x = \pm c$ gilt:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c \quad \text{bzw.} \quad u_x = \frac{-c + v}{1 - \frac{v}{c}} = -c.$$

Das erklärt, warum Galaxien, die sehr weit von uns entfernt sind, sich mit Geschwindigkeiten bewegen, die näher bei der Lichtgeschwindigkeit liegen als die Geschwindigkeiten benachbarter Galaxien. Trotzdem haben sie alle das gleiche Alter wie unsere eigene Galaxis. Wir sehen sie so, wie unsere Galaxis heute aussieht, weil uns ihr Licht zur gleichen Zeit erreicht wie das der entfernteren Galaxien. Für $u_x' = \pm v$ gilt

$$\frac{u_x}{c} = \frac{2\frac{v}{c}}{1+\frac{v^2}{c^2}} < 1 \quad \text{bzw.} \quad u_x = \frac{-v+v}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Am Anfang des Universums zur Zeit $t = 0$ bzw. $v = c$ stellen wir fest, daß das Licht längs einer Orthodromen noch gar keinen Weg zurückgelegt haben kann, obwohl die Masse der erst in ihrer Entstehung begriffenen Galaxien bereits in Fahrt ist, sich aber immer noch in der Singularität befindet:

$$s^2 = \frac{c^2}{\omega^2} = c^2\tau^2 = c^2t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 0.$$

Am Ende der Zeit $t = T$ zeigt sich, daß sich das Licht längs einer Orthodromen ebenfalls in der Singularität wiederfindet, nachdem es den ganzen Weg durchs Universum zurückgelegt hat. Das liegt an der Eigenzeit τ, die gegen Null geht, wenn die Galaxien oder was in Form von Schwarzen Löchern davon übriggeblieben ist wieder Lichtgeschwindigkeit erreichen. Dann gilt wegen $v = -c$ ebenfalls

$$s^2 = c^2t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = 0.$$

Im Umkehrpunkt nimmt das Abstandsquadrat wegen $v = 0$ den Wert $s^2 = c^2t^2$ an. Die Größe des Alls kann somit aus dem maximalen Weg s_R zur Zeit $t_R = T/2$ gemäß

$$s_R = ct_R = cT/2,$$

berechnet werden, wobei T die Periodendauer bzw. das maximal erreichbare Alter des Universums ist. In diesem Zustand hat das All ausschließlich potentielle Energie, seine kinetische Energie ist aufgebraucht. Nach Umformen des quadratischen Wegelements stellt sich heraus, daß die Kreisfrequenz des Alls umgekehrt proportional zur Zeitkomponente ist,

$$\omega(t, v) = \frac{c}{ct\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

d.h. das Weltall dreht sich um so schneller, je jünger es ist, und erreicht aufgrund der Drehimpulserhaltung seine volle Rotationsgeschwindigkeit erst wieder, wenn die Zeit abgelaufen ist.

Fassen wir zusammen, so gilt in der Singularität aus Gründen der Stetigkeit für die Winkelgeschwindigkeit der Grenzwert

$$\lim_{v\to\pm c}\omega(t,v)=\frac{1}{ct(c)}\lim_{v\to\pm c}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\to\infty$$

und im Umkehrpunkt der Grenzwert

$$\lim_{v\to 0}\omega(t,v)=\frac{1}{ct(0)}\lim_{v\to 0}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\to\frac{1}{t_R}.$$

Seine minimale Rotationsgeschwindigkeit besitzt das All also zur Zeit t_R bei maximaler radialer Ausdehnung und verschwindender Geschwindigkeit, d.h. wenn gilt:

$$\omega_{\min}=\frac{1}{t_R}=\frac{c}{s_R}.$$

Ist der Scheitelpunkt überschritten, beginnt sich das All wieder zusammenzuziehen und die Galaxien[3] fliegen auf uns zu. Die komplexe Kreisfrequenz des Weltalls ist in Abb. 1 dargestellt. Man beachte den Anstieg bei $v=\pm c$. Abb. 2 zeigt die reziproke Kreisfrequenz sprich den auf der Orthodromen zurückgelegten Weg. Die Eckpunkte fehlen hier lediglich deswegen, weil nicht durch Null dividiert werden darf.

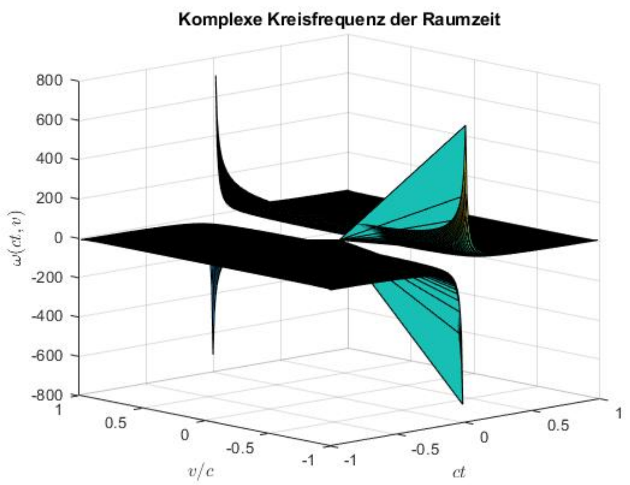

Abbildung 2. Komplexe Kreisfrequenz des Alls mit Maxima bei t=0 und v=±c

Mit der Definition des Wellenvektors

$$k\equiv\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{cT}=\frac{\omega}{c}$$

[3] bzw. was noch davon übriggeblieben ist und nicht in Schwarzen Löchern verschwunden ist

ist die Periodendauer T des Weltalls nach einer Wellenlänge $\lambda = cT$ abgelaufen. Das entspricht einem Umlaufwinkel von 2π mit einer Eigenzeit $\tau = s/c$, wobei ω die gewöhnliche dreidimensionale Kreisfrequenz ist.

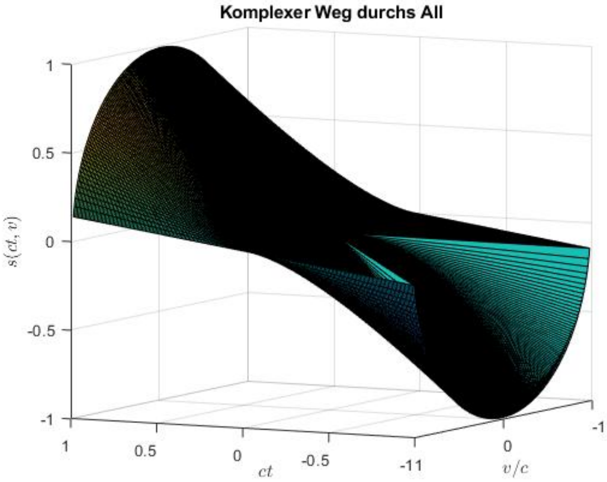

Abbildung 3. Mit zunehmender Geschwindigkeit und Zeit verschwindet die Raumzeit wieder in der Singularität

Im bewegten Bezugssystem, z.B. in unserer Galaxis, ist die Summe der Kräfte aus Gravitationskraft und Zentrifugalkraft stets gleich null:

$$\omega^2 s - \frac{GM}{s^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{c^2}{s} - \frac{GM}{s^2} = 0,$$

wobei s der raumzeitliche Abstand von der Singularität, M die Masse des Universums und G die Gravitationskonstante ist. Aus

$$\omega^2 = \frac{GM}{s^3} \quad \text{folgt} \quad \dot{s}^2 = c^2 - v^2 = \omega^2 s^2 - \frac{GM}{s} = 0.$$

Im Scheitelpunkt erreicht das All seine größte räumliche Ausdehnung, es friert aber nicht ein, sondern zieht sich wieder zusammen. Der Umkehrpunkt ist charakterisiert durch minimale kinetische bzw. Rotationsenergie und maximale potentielle Energie. Die Gravitation ist wie die Zentrifugalkraft zum Erliegen gekommen, beide Kräfte heben sich gegenseitig auf. Mithin gilt

$$\omega_{\min}^2 = \frac{c^2}{s_R^2} = \frac{GM}{s_R^3} \quad \text{bzw.} \quad c^2 = \omega_{\min}^2 s_R^2 = \frac{GM}{s_R},$$

wobei s_R der maximale vierdimensionale Radius des Universums ist.

Zu Beginn seiner Expansion besitzt das Universum maximale Zentrifugalbeschleunigung bei gleichzeitig hoher Rotationsgeschwindigkeit. Die Ausbreitung erfolgt radial nach außen auf einer lichtartigen Hyperfläche, die sich in 3 Dimensionen als Sphäre darstellen läßt. Für $v = c$ ergibt sich für den Radius s_0 der Singularität derselbe Wert wie für maximale Ausdehnung:

$$\omega_{\max}^2 = \frac{c^2}{s_0^2} = \frac{GM}{s_0^3} \quad \text{zu} \quad s_0 = \frac{GM}{c^2}.$$

Weil aber in der Singularität die Gravitation ausgelöscht ist, gilt $s_0 = 0$. Tatsächlich entsteht die Gravitation erst durch den Urknall, sie erreicht ihr Minimum bei maximaler Ausdehnung des Raums und nimmt danach wieder zu. In der Nähe der Singularität muß die Gravitationskraft maximal sein, weil dort auch die Zentrifugalkraft ihr Maximum annimmt. Wir können also davon ausgehen, daß während des Urknalls die gesamte Materie schlagartig in Strahlung umgewandelt wird und in der Singularität nur Strahlung in Form von potentieller Energie vorhanden ist. Nur wenn die Materie vollständig in Strahlung umgewandelt worden ist, kann das All Lichtgeschwindigkeit annehmen. Durch die Entstehung der Materie wird die Geschwindigkeit des Alls bis zum Erreichen des Umkehrpunkts abgebremst. Die abnehmende kinetische Energie wird dabei fortlaufend in potentielle Energie umgewandelt, d.h. sie verschwindet als dunkle Energie im reziproken Raum. Gravitationskraft und Zentrifugalkraft halten sich aber in jedem Punkt auf der Orthodromen, sowohl während der Ausdehnung als auch der anschließenden Kontraktion, die Waage.

Nunmehr haben wir die richtige Erklärung, warum das Weltall kurz vor Erreichen der Singularität seine maximale Beschleunigung annimmt. Einer kosmologischen Konstante, um die beschleunigte Expansion des Alls und damit die dunkle Energie zu erklären, bedarf es nach dieser Herleitung nicht mehr. Einstein nannte sie die größte Eselei seines Lebens.

Anhang

Die Ableitungen des metrischen Tensors stellen wir vorzugsweise in Matrixform dar, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} & \frac{\partial g_{12}}{\partial x} & \frac{\partial g_{13}}{\partial x} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial x} & \frac{\partial g_{22}}{\partial x} & \frac{\partial g_{23}}{\partial x} \\ \frac{\partial g_{31}}{\partial x} & \frac{\partial g_{32}}{\partial x} & \frac{\partial g_{33}}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2} \begin{pmatrix} 2x(g_{11}+1) & 2xg_{12} - ct & 2xg_{13} \\ 2xg_{21} - ct & 2xg_{22} & 2xg_{23} + y \\ 2xg_{31} & 2xg_{32} + y & 2x(g_{33} - 1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} & \frac{\partial g_{12}}{\partial y} & \frac{\partial g_{13}}{\partial y} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial y} & \frac{\partial g_{22}}{\partial y} & \frac{\partial g_{23}}{\partial y} \\ \frac{\partial g_{31}}{\partial y} & \frac{\partial g_{32}}{\partial y} & \frac{\partial g_{33}}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2t^2 - x^2 - y^2 - s^2} \begin{pmatrix} 2y(g_{11}+1) & 2yg_{12} & 2yg_{13} - ct \\ 2yg_{21} & 2y(g_{22} - 1) & 2yg_{23} + x \\ 2yg_{31} - ct & 2yg_{32} + x & 2yg_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{12}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{13}}{\partial ct} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{22}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{23}}{\partial ct} \\ \frac{\partial g_{31}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{32}}{\partial ct} & \frac{\partial g_{33}}{\partial ct} \end{pmatrix} = -\frac{1}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\begin{pmatrix} 2ctg_{11} & 2ctg_{12}+x & 2ctg_{13}+y \\ 2ctg_{21}+x & 2ct\left(g_{22}-1\right) & 2ctg_{23} \\ 2ctg_{31}+y & 2ctg_{32} & 2ct\left(g_{33}-1\right) \end{pmatrix}.$$

Für die spätere Rechnung benötigen wir noch die Relationen

$$g_{11}+1=\frac{c^2t^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}, \quad g_{22}-1=\frac{x^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}, \quad g_{33}-1=\frac{y^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}.$$

Um die Richtigkeit unserer Ergebnisse zu überprüfen, wollen wir sie noch einmal unabhängig anhand der Definition der Christoffel-Symbole

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left[g^{\gamma 1}\left(\frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial u_\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u_\beta}+-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_1}\right)+g^{\gamma 2}\left(\frac{\partial g_{\beta 2}}{\partial u_\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u_\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_2}\right)+g^{\gamma 3}\left(\frac{\partial g_{\beta 3}}{\partial u_\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha 3}}{\partial u_\beta}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_3}\right)\right]$$

nachrechnen, wobei die Indizes nur die Werte $1\equiv ct,\ 2\equiv x$ und $3\equiv y$ annehmen können. Es ergeben sich dabei folgende Koeffizienten:

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial ct}+g^{12}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)+g^{13}\left(2\frac{\partial g_{13}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\left(2\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}\right)+g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}+g^{13}\left(2\frac{\partial g_{23}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{33}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\left(2\frac{\partial g_{31}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right)+g^{12}\left(2\frac{\partial g_{32}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right)+g^{13}\frac{\partial g_{33}}{\partial y}\right]=-\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}+g^{13}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{13}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\right)\right]=\frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{13}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+g^{12}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x}\right)+g^{13}\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right]=\frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma^1_{23}=\frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial y}-\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}\right)+g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+g^{13}\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right]=-\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{ct}{s^2},$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\frac{\partial g_{11}}{\partial ct}+g^{22}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)+g^{23}\left(2\frac{\partial g_{13}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\left(2\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}\right)+g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}+g^{23}\left(2\frac{\partial g_{23}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{33}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\left(2\frac{\partial g_{31}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right)+g^{22}\left(2\frac{\partial g_{32}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right)+g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial y}\right]=-\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}+g^{23}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{13}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\right)\right]=\frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{13}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+g^{22}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x}\right)+g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right]=\frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{23}^{2}=\frac{1}{2}\left[g^{21}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial y}-\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}\right)+g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+g^{23}\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right]=-\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{x}{s^2},$$

$$\Gamma_{11}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\frac{\partial g_{11}}{\partial ct}+g^{32}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)+g^{33}\left(2\frac{\partial g_{13}}{\partial ct}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{x^2+y^2+s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma_{22}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\left(2\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}\right)+g^{32}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}+g^{33}\left(2\frac{\partial g_{23}}{\partial x}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right)\right]=-\frac{c^2t^2-y^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma_{33}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\left(2\frac{\partial g_{31}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right)+g^{32}\left(2\frac{\partial g_{32}}{\partial y}-\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right)+g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial y}\right]=-\frac{c^2t^2-x^2-s^2}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma_{12}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+g^{32}\frac{\partial g_{22}}{\partial ct}+g^{33}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{13}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\right)\right]=\frac{ctx}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma_{13}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+g^{32}\left(\frac{\partial g_{32}}{\partial ct}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y}-\frac{\partial g_{13}}{\partial x}\right)+g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial ct}\right]=\frac{cty}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2},$$

$$\Gamma_{23}^{3}=\frac{1}{2}\left[g^{31}\left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial y}-\frac{\partial g_{23}}{\partial ct}\right)+g^{32}\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x}\right]=-\frac{xy}{c^2t^2-x^2-y^2-s^2}\frac{y}{s^2}.$$

Diese entsprechen damit genau denen, die wir oben berechnet haben. Damit ist die Richtigkeit ihrer Herleitung validiert.

