Aufgabe: Zeigen Sie an einem Beispiel, daß die Naturgesetze universell sind, d.h. unabhängig vom gewählten Bezugssystem gelten. Zeigen Sie ferner, daß die Raumkrümmung in einem beschleunigten Bezugssystem mindestens einmal pro Periode eine Singularität durchläuft.

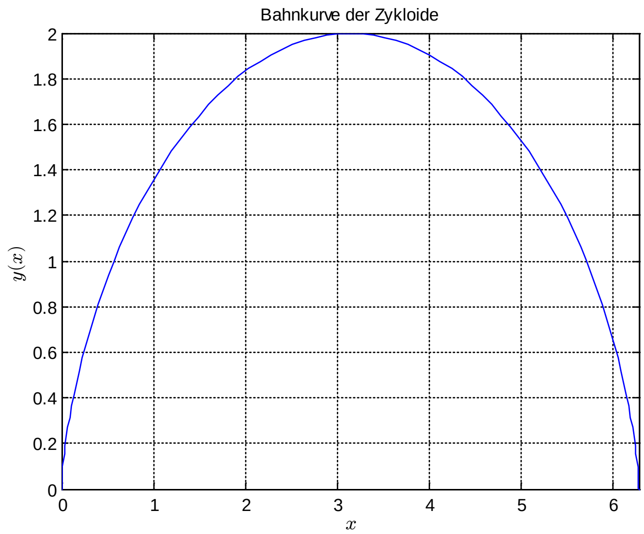
Lösung: Gegeben sei die Kreisbewegung eines Massenpunktes mit konstanter Geschwindigkeit. Wir zeigen, daß das zweite Newtonsche Gesetz in einem System, das mit einem Randpunkt fest verbunden ist, denselben Wert für die Beschleunigung liefert wie das Inertialsystem. Der Randpunkt beschreibe demnach eine Zykloide, die genau dann entsteht, wenn man einen Punkt auf dem Kreisumfang festhält und den Kreis wie bei der Rollbewegung eines Rades längs einer Geraden abspult. Bewegt sich der Punkt auf einem Kreis mit Radius R mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω, so entspricht die Geschwindigkeit des Kreismittelpunkts der besagten Umlaufgeschwindigkeit. In kartesischen Koordinaten ausgedrückt lauten die Bewegungsgleichungen der Zykloide in Parameterdarstellung:

$$x(t) = R(\omega t - \sin \omega t),$$
$$y(t) = R(1 - \cos \omega t).$$

Die Bahngleichung folgt daraus durch Integration,

$$x = \int_0^y \frac{y\,dy}{\sqrt{2Ry - y^2}} = R\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2}.$$

Da die Gleichung nicht explizit nach y aufgelöst werden kann, müssen in diesem Fall alle kinematischen Größen direkt aus der Parameterdarstellung hergeleitet werden.



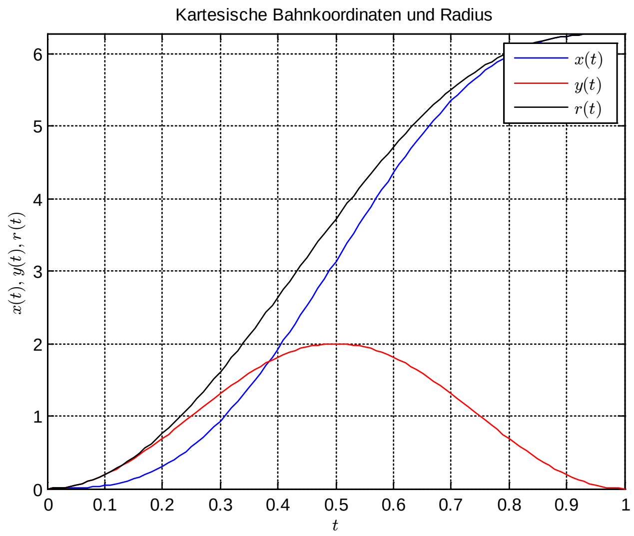
In Parameterdarstellung erhalten wir als Betrag des Radiusvektors den Ausdruck

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R\sqrt{(\omega t - \sin \omega t)^2 + (1 - \cos \omega t)^2},$$

wobei der Radius mit der x-Achse den Polarwinkel

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1-\cos\omega t}{\omega t - \sin\omega t}$$

einschließt. Die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ entspricht einer gewöhnlichen Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit der Periodendauer T. Die Phase ist anfangs 90°, wird nach der halben Umlaufdauer null und geht danach auf −90° zurück. Bahnkoordinaten und Radius sind in nachfolgender Abbildung dargestellt.



Die Geschwindigkeitskomponenten lauten in kartesischen Koordinaten:

$$\dot{x}(t) = \omega R(1-\cos\omega t),$$
$$\dot{y}(t) = \omega R\sin\omega t.$$

Daraus bestimmt sich die Bahn- bzw. Tangentialgeschwindigkeit zu

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega R\sqrt{2(1-\cos\omega t)} = 2\omega R\sin\frac{\omega t}{2}.$$

In ebenen Polarkoordinaten haben wir dafür den Ausdruck

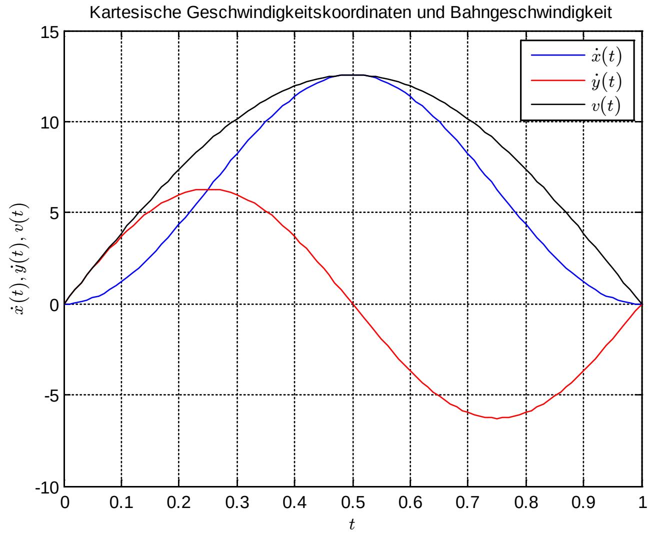
$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2},$$

wobei sich die Bahngeschwindigkeit zusammensetzt aus der Radialgeschwindigkeit

$$v_r = \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\omega R(\omega t - \omega t\cos\omega t)}{\sqrt{(\omega t - \sin\omega t)^2 + (1-\cos\omega t)^2}}$$

und der Transversalgeschwindigkeit

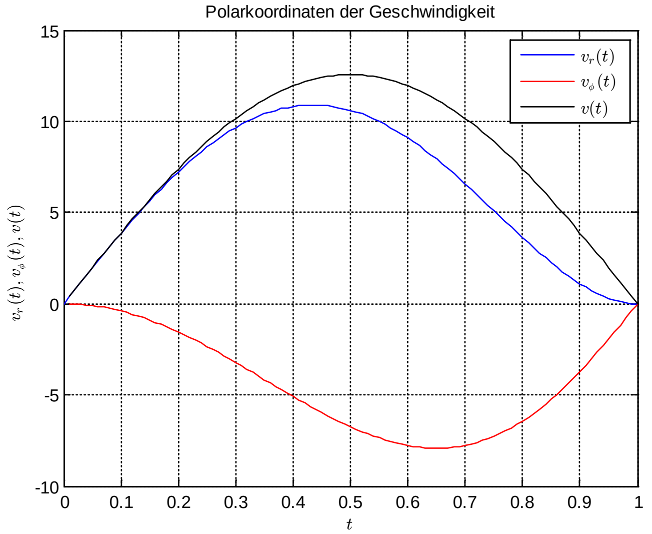
$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\omega R\left(\omega t \sin \omega t - 2\left(1 - \cos \omega t\right)\right)}{\sqrt{\left(\omega t - \sin \omega t\right)^2 + \left(1 - \cos \omega t\right)^2}}.$$



In die letztere geht wegen

$$\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = \frac{\omega\left(\omega t \sin \omega t - 2\left(1 - \cos \omega t\right)\right)}{\left(\omega t - \sin \omega t\right)^2 + \left(1 - \cos \omega t\right)^2}$$

die zeitabhängige Winkelgeschwindigkeit ein.



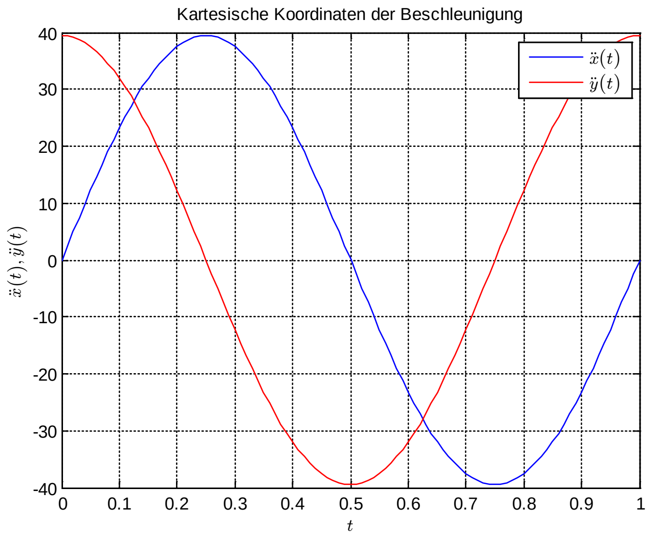
Damit sind alle Ableitungen bis zur ersten Ordnung vollständig beschrieben. Im Gegensatz zur Bahngeschwindigkeit sind die Komponentengeschwindigkeiten nicht symmetrisch zur Halbperiode. Die Komponentengleichungen der Beschleunigung sind in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$\ddot{x}(t) = \omega^2 R \sin \omega t,$$
$$\ddot{y}(t) = \omega^2 R \cos \omega t,$$

wobei der Betrag der Beschleunigung konstant ist:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 R.$$

Die Beschleunigung entspricht betragsmäßig exakt der Radialbeschleunigung einer Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit im Inertialsystem, und damit ist gezeigt, daß die physikalischen Gesetze unabhängig vom jeweiligen Bezugssystem sind.



Die Radialbeschleunigung erhalten wir durch entsprechende Umformung der Terme

$$\ddot{r} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 \dot{y}^2 - 2xy\dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

bzw.

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{x^2 \dot{y}^2 - 2xy\dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

zu

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\omega^2 R\left(\omega t \sin \omega t - (1 - \cos \omega t)\right)}{\sqrt{(\omega t - \sin \omega t)^2 + (1 - \cos \omega t)^2}}.$$

Für die Transversalbeschleunigung folgt aus

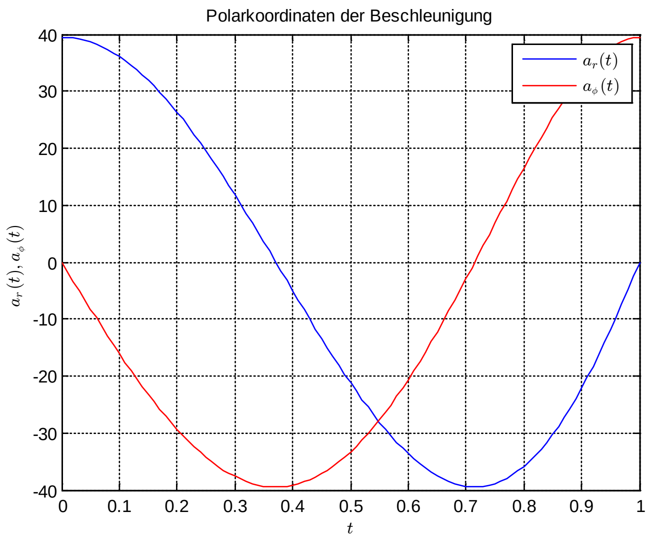
$$r\ddot{\varphi} = \frac{x\ddot{y} - \ddot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2(x\dot{x} + y\dot{y})(x\dot{y} - \dot{x}y)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

und

$$\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})(x\dot{y} - \dot{x}y)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

der Ausdruck

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{x\ddot{y} - \ddot{x}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\omega^2 R(\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)}{\sqrt{(\omega t - \sin \omega t)^2 + (1 - \cos \omega t)^2}}.$$



Das bedeutet für die Beschleunigung nichts anderes, als daß diese unabhängig vom jeweiligen Koordinatensystem ist:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{\frac{(x\ddot{x} + y\ddot{y})^2 + (x\ddot{y} - \ddot{x}y)^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}.$$

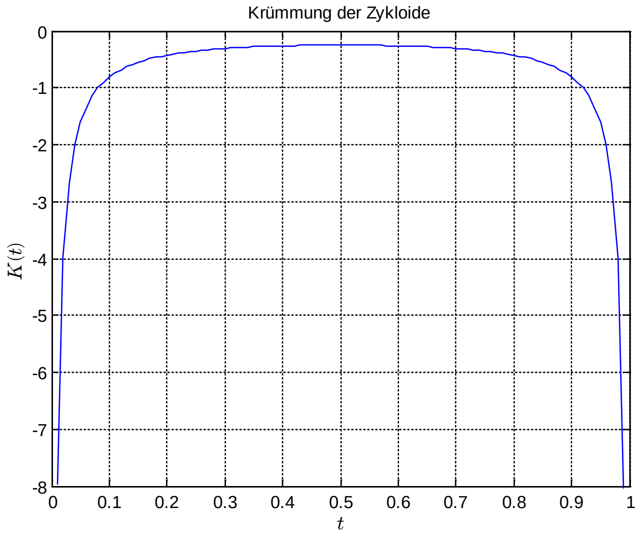
Längs einer Zykloide ist die Beschleunigung also konstant,[1] und für ihre Krümmung gilt

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3} = -\frac{1}{4R \sin \frac{\omega t}{2}}.$$

Wie man sieht, hat die Zykloide stets eine negative Krümmung, wobei der Krümmungsradius ρ gegeben ist durch den Betrag des Kehrwerts der Krümmung

[1] Das folgt aus der Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

$$\rho = \frac{1}{|K|} = 4R\sin\frac{\omega t}{2}.$$

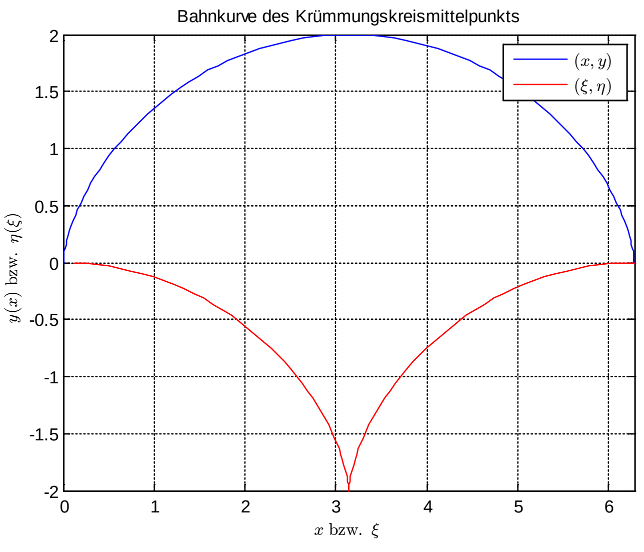


Man erkennt ebenfalls, daß der Krümmungsradius niemals unendlich werden kann. Für die Koordinaten ξ und η des Krümmungskreismittelpunkts erhalten wir damit die Ausdrücke

$$\xi = x - \frac{\dot{y}}{K\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = R\left(\omega t + \sin\omega t\right),$$

$$\eta = y + \frac{\dot{x}}{K\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -R\left(1 - \cos\omega t\right).$$

Der Krümmungsradius wird maximal, wo Bahngeschwindigkeit und Normalbeschleunigung maximal werden, und er ist null, wo die Krümmung unendlich ist, d.h. in der Singularität.



Wie bei der Kreisbewegung läßt sich nämlich die Beschleunigung zerlegen in eine Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \dot{v} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \omega^2 R \cos\frac{\omega t}{2}$$

und eine Normalbeschleunigung

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\omega^2 R \sin\frac{\omega t}{2}.$$

Für die aufsummierten Betragsquadrate heißt das:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \omega^2 R,$$

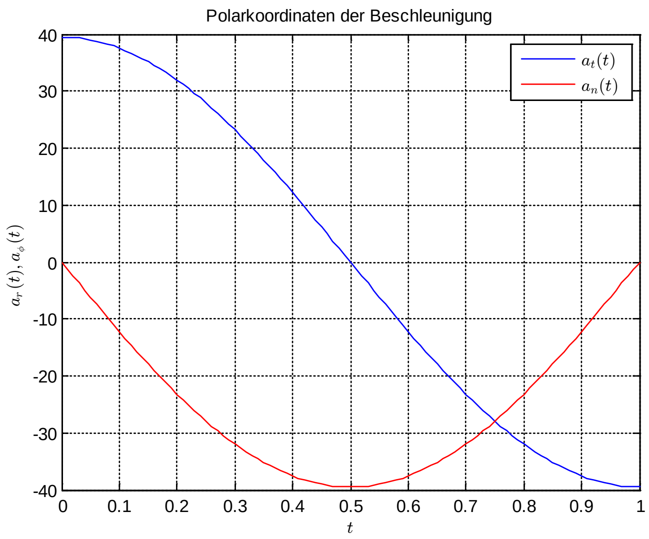
wobei in ebenen Polarkoordinaten für die Komponenten

$$a_t = \frac{\dot{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) + r\dot{\varphi}\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}$$

bzw.

$$a_n = \frac{\dot{r}\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) - r\dot{\varphi}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}}$$

gilt. Tangential- und Normalkomponente sind hierbei punktsymmetrisch zu den Eckwerten bzw. spiegelsymmetrisch um eine Achse senkrecht zur Halbperiode.



Schließlich erhalten wir den Betrag der Beschleunigung in Polarkoordinaten aus der Formel

$$a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)^2 + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)^2},$$

und für die Krümmung in Polarkoordinaten ergibt sich

$$K = \frac{\dot{r}\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) - r\dot{\varphi}\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}^3},$$

womit wir die Zykloide vollständig beschrieben haben. Jeder Punkt auf dieser Zykloide durchläuft irgendwann einen Punkt unendlicher Krümmung, die einem verschwindenden Krümmungsradius entspricht und mit einer Singularität zusammenfällt. Dieser Punkt kann willkürlich gewählt werden. Wir haben ihn in den zeitlichen Nullpunkt verlegt. Wenn wir also annehmen, daß das Universum einen Drehimpuls besitzt und somit ein beschleunigtes Bezugssystem darstellt, so kommt auch für das All irgendwann ein Zeitpunkt, wo sich der Raum in diesem Punkt zu einer Singularität zusammenzieht. Die Frage der Gleichzeitigkeit und des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums, d.h. wann und wo die Singularität im All auftritt, haben wir hierbei nicht betrachtet. Sicher ist nur, daß es sie aus Symmetriegründen geben muß. Nimmt man umgekehrt an, daß das All keinen Drehimpuls hat, könnte der Raum niemals in einer Singularität enden.

Anhang

```
% Zykloide
clear all

R = 1; % Kreisradius
T = 1; % Periodendauer
n = 101; % Zahl der Stützstellen
omega = 2*pi/T; % Kreisfrequenz

for i = 1:n
    t(i) = (i-1)/(n-1)*T; % Zeit
    x(i) = R*(omega*t(i)-sin(omega*t(i))); % x-Koordinate
    y(i) = R*(1-cos(omega*t(i))); % y-Koordinate
    r(i) = sqrt(x(i)^2 + y(i)^2); % Radialer Abstand
    xp(i) = R*omega*(1-cos(omega*t(i))); % Geschwindigkeit in x-Richtung
    yp(i) = R*omega*sin(omega*t(i)); % Geschwindigkeit in y-Richtung
    v(i) = sqrt(xp(i)^2 + yp(i)^2); % Bahngeschwindigkeit
    vr(i) = (x(i)*xp(i)+y(i)*yp(i))/r(i); % Radialgeschwindigkeit
    vphi(i) = (x(i)*yp(i)-y(i)*xp(i))/r(i); % Transversalgeschwindigkeit
    x2p(i) = R*omega^2*sin(omega*t(i)); % Beschleunigung in x-Richtung
    y2p(i) = R*omega^2*cos(omega*t(i)); % Beschleunigung in y-Richtung
    ar(i) = (x(i)*x2p(i)+y(i)*y2p(i))/r(i); % Radialbeschleunigung
    aphi(i) = (x(i)*y2p(i)-y(i)*x2p(i))/r(i); % Transversalbeschleunigung
    at(i) = (xp(i)*x2p(i)+yp(i)*y2p(i))/v(i); % Tangentialbeschleunigung
    an(i) = (xp(i)*y2p(i)-yp(i)*x2p(i))/v(i); % Normalbeschleunigung
    K(i) = an(i)/v(i)^2; % Krümmung
    rho(i) = abs(1/K(i)); % Krümmungsradius
    xi(i) = x(i)-yp(i)/K(i)/v(i); % x-Koordinate des Krümmungskreismittel-
punkts
    eta(i) = y(i)+xp(i)/K(i)/v(i); % y-Koordinate des Krümmungskreismittel-
punkts
end

% Nichtdefierte Grenzwerte
vr(1) = 0;
ar(1) = 4*pi^2;
aphi(1) = 0;
at(1) = 4*pi^2;
an(1) = 0;
xi(1) = 0;
rho(1) = 0;

% Abbildungen
figure(1)
plot(x,y)
grid on
xlim([0 2*pi*R])
ylabel('$y(x)$','interpreter','latex')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
title('Bahnkurve der Zykloide')

figure(2)
plot(t,x)
grid on
xlim([0 T])
ylim([0 2*pi*R])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$x(t), y(t), r(t)$','interpreter','latex')
hold on
```



```
plot(t,y,'r')
hold on
plot(t,r,'k')
title('Kartesische Bahnkoordinaten und Radius')
legend({'$x(t)$','$y(t)$','$r(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(3)
plot(t,xp)
grid on
xlim([0 T])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$\dot x(t), \dot y(t), v(t)$','interpreter','latex')
hold on
plot(t,yp,'r')
hold on
plot(t,v,'k')
title('Kartesische Geschwindigkeitskoordinaten und Bahngeschwindigkeit')
legend({'$\dot x(t)$','$\dot y(t)$','$v(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(4)
plot(t,x2p)
grid on
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$\ddot x(t), \ddot y(t)$','interpreter','latex')
hold on
plot(t,y2p,'r')
title('Kartesische Koordinaten der Beschleunigung')
legend({'$\ddot x(t)$','$\ddot y(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(5)
plot(t,vr)
grid on
xlim([0 T])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$v_{r}(t), v_{\phi}(t), v(t)$','interpreter','latex')
hold on
plot(t,vphi,'r')
hold on
plot(t,v,'k')
title('Polarkoordinaten der Geschwindigkeit')
legend({'$v_{r}(t)$','$v_{\phi}(t)$','$v(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(6)
plot(t,ar)
grid on
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$a_{r}(t), a_{\phi}(t)$','interpreter','latex')
hold on
plot(t,aphi,'r')
title('Polarkoordinaten der Beschleunigung')
legend({'$a_{r}(t)$','$a_{\phi}(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(7)
plot(t,at)
grid on
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$a_{r}(t), a_{\phi}(t)$','interpreter','latex')
hold on
plot(t,an,'r')
title('Polarkoordinaten der Beschleunigung')
```



```
legend({'$a_{t}(t)$','$a_{n}(t)$'},'Interpreter','latex');

figure(8)
plot(t,K)
grid on
xlim([0 T])
ylim([-8*R 0])
ylabel('$K(t)$','interpreter','latex')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
title('Krümmung der Zykloide')

figure(9)
plot(x,y)
grid on
xlim([0 2*pi*R])
xlabel('$x$ bzw. $\xi$','interpreter','latex')
ylabel('$y(x)$ bzw. $\eta(\xi)$','interpreter','latex')
hold on
plot(xi,eta, 'r')
title('Bahnkurve des Krümmungskreismittelpunkts')
legend({'$(x, y)$','$(\xi, \eta)$'},'Interpreter','latex');

figure(10)
plot(t,rho)
grid on
xlim([0 T])
ylabel('$\rho(t)$','interpreter','latex')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
title('Krümmungsradius der Zykloide')
```

