Aufgabe: Erklären Sie die Kalt- und Warmzeiten anhand von zu unterschiedlichen Zeiten entstandenen verschiedenartigen Isotopen. Begründen Sie, warum eine Erderwärmung von einem Grad im astronomisch kurzen Zeitraum von zweihundert Jahren keine natürlichen Ursachen haben kann.

Lösung: Für die Modellierung der Vorgänge sind wir auf grobe Vereinfachungen angewiesen. Wir nehmen dazu an, daß im Verlauf der Entstehung unseres Planeten innerhalb eines überschaubaren Zeitraums bestimmte instabile, nichtstrahlende schwere Elemente entstanden sind,[1] die unmittelbar nach ihrer Entstehung in radioaktive Isotope zu zerfallen begannen. Seien

$$N_i(t) = \begin{cases} A_i e^{-\gamma_i(t-t_i)} & \text{für} \quad t \geq t_i, \\ 0 & \text{für} \quad t < t_i \end{cases}$$

die Teilchenzahlen des *i*ten radioaktiven Isotops für Zeiten größer t_i, wobei A_i die anfängliche Teilchenzahl ist und γ_i die Zerfallsrate. Der Mittelwert $\bar{N}$ der Zerfälle entspreche einer konstanten Temperatur von 0° C. Dann ist

$$N(t) - \bar{N} = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$$

die Zahl der Zerfälle, die einer positiven bzw. negativen Temperatur entspricht. Im Zeitintervall $[t_i, t_{i+1}], \ i = 1, \ldots$ gelten dann folgende Zerfalls-Exzeßgrößen:

$$N(t) - \bar{N} = \begin{cases} A_1 e^{-\gamma_1(t-t_1)} & \text{für} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ A_1 e^{-\gamma_1(t-t_1)} + A_2 e^{-\gamma_2(t-t_2)} & \text{für} \quad t_2 \leq t \leq t_3, \\ A_1 e^{-\gamma_1(t-t_1)} + A_2 e^{-\gamma_2(t-t_2)} + A_3 e^{-\gamma_3(t-t_3)} & \text{für} \quad t_3 \leq t \leq t_4, \\ A_1 e^{-\gamma_1(t-t_1)} + A_2 e^{-\gamma_2(t-t_2)} + A_3 e^{-\gamma_3(t-t_3)} + A_4 e^{-\gamma_4(t-t_4)} & \text{für} \quad t_4 \leq t \leq t_5. \end{cases}$$

Für die nachfolgende beispielhafte Simulation mögen folgende Werte gelten:

$$\begin{aligned} &t_1 = 0, && A_1 = 2, && \gamma_1 = 0{,}01, \\ &t_2 = 90, && A_2 = (1/2)A_1, && \gamma_2 = 1{,}5\gamma_1, \\ &t_3 = 220, && A_3 = (2/3)A_1, && \gamma_3 = 3\gamma_1, \\ &t_4 = 330, && A_4 = (3/5)A_1, && \gamma_4 = 4\gamma_1. \end{aligned}$$

Dabei sind die Zeiteinheiten in 10 Millionen Jahren angegeben, die Amplituden in absoluten Temperaturen und die Zeitkonstanten in inversen 10 Millionen Jahren. Der Temperaturmit-

[1] Bzw. Elemente mit kurzer Halbwertszeit, die unmittelbar darauf in Isotope mit langen Halbwertszeiten zerfallen sind

telwert entspreche 273,15 Kelvin. Das Ergebnis ist über einen Zeitraum von 4 Milliarden Jahren in Abb. 1 dargestellt.

Da die Entstehung der Isotope nicht schlagartig zu einem festen Zeitpunkt begonnen haben kann, sind die scharfen Spitzenwerte rein hypothetisch. Würde man indes den Kurvenverlauf durch einen Cubic Spline interpolieren, hätten wir eine deutlich realistischere Darstellung. Tatsache bleibt, daß in unserem Erdinneren radioaktive Zerfallsprozesse stattfinden, die keineswegs stationär sind, weil ein Isotopengemisch unterschiedlicher Elemente vorliegt, welches dafür sorgt, daß die Erde auf Milliarden Jahre hinaus von innen beheizt wird. Es hängt allein von den Zerfallskonstanten dieser Isotope ab, in welchen Zeiträumen sich erneute Warmzeiten ergeben, und von den Teilchenzahlen der dazu beitragenden Elemente.

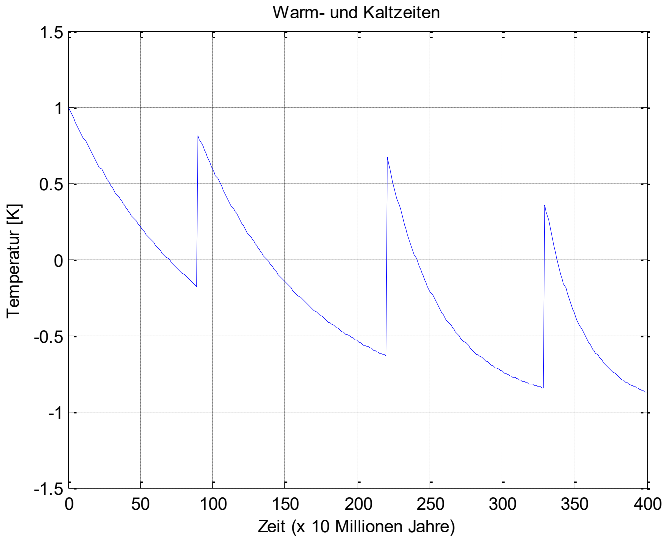

Abbildung 1. Dargestellt ist der Temperaturverlauf in K mit 4 Warm- und 4 Kaltzeiten

Innerhalb der letzten einen Milliarde Jahre hat es 5 Warmzeiten und 6 Eiszeiten gegeben. Das entspricht einer Übergangszeit von ca. 200 Millionen Jahren zwischen je zwei warm- bzw. eiszeitlichen Maxima. Nehmen wir ferner einen Spitze-Spitze-Wert von 4 K an, so hätten wir eine Änderungsrate von

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4\,\mathrm{K}}{200 \cdot 10^6\,\mathrm{a}} = 2 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{a}}.$$

Damit kann eine Änderung um 1 Kelvin nur in einem Zeitraum von

$$\Delta t = \frac{1}{2 \cdot 10^{-8}}\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{K}} \cdot 1\,\mathrm{K} = 50 \cdot 10^6\,\mathrm{a} = 50\ \text{Millionen Jahren}$$

erklärt werden. Die gegenwärtig beobachtete Erderwärmung kann demnach keine natürlichen Ursachen haben und muß anthropogen bedingt sein.

Anhang

```
% Eiszeiten
A1 = 2;
A2 = 1/2*A1;
A3 = 2/3*A1;
A4 = 3/5*A1;
gamma1 = 0.01;
gamma2 = 1.5*gamma1;
gamma3 = 3*gamma1;
gamma4 = 4*gamma1;
t1 = 0;
t2 = 90;
t3 = 220;
t4 = 330;
a = 0;
b = 400;
n = 400;
for i=1:n
    t(i) = (i-1)*(b-a)/(n-1)
    if i >= t1 && i<= t2
        N(i) = A1*exp(-gamma1*(t(i)-t1))
    end
    if i > t2 && i<= t3
        N(i) = A1*exp(-gamma1*(t(i)-t1))+A2*exp(-gamma2*(t(i)-t2))
    end
    if i > t3 && i<= t4
        N(i)  = A1*exp(-gamma1*(t(i)-t1))+A2*exp(-gamma2*(t(i)-t2))+A3*exp(-
gamma3*(t(i)-t3))
    end
    if i >= t4 && i<= b
        N(i)  = A1*exp(-gamma1*(t(i)-t1))+A2*exp(-gamma2*(t(i)-t2))+A3*exp(-
gamma3*(t(i)-t3))+A4*exp(-gamma4*(t(i)-t4))
    end
end

plot(t,N-1)
grid on
xlim([0 400])
ylim([-1.5 1.5])
ylabel('Temperatur [K]')
xlabel('Zeit (x 10 Millionen Jahre)')
title('Warm- und Kaltzeiten')
```