

Mathematikaufgabe 55

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Ein Faden wird schraubenförmig um einen Zylinder gewickelt. Der Faden reicht exakt viermal um den Zylinder herum. Der Kreisumfang der Rolle beträgt 4 cm, die Länge 12 cm. Welche Länge hat der Faden? (Diese Lösung haben einst 96 Prozent der Mathestudenten in den USA nicht gefunden.)

Lösung: Wir wählen zunächst den analytischen Ansatz. Die Bogenlänge l des Fadens berechnet sich gemäß der Formel

$$l = \int_0^l ds = \int_0^T \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt,$$

wobei T die Umlaufzeit einer Wicklung ist. Wir parametrisieren den Faden für eine Umdrehung mit Radius r und eine Geschwindigkeit v in z -Richtung wie folgt:

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos \omega t, \\y(t) &= r \sin \omega t, \\z(t) &= vt,\end{aligned}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$ die Kreisfrequenz angibt. Damit erhalten wir als Anfangsbedingungen

$$x(0) = r, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

und als Endbedingungen

$$x(T) = r, \quad y(T) = 0, \quad z(T) = vT.$$

Die Ableitungen ergeben sich durch Differentiation der Ortskoordinaten nach der Zeit t :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -r\omega \sin \omega t, \\ \dot{y}(t) &= r\omega \cos \omega t, \\ \dot{z}(t) &= v.\end{aligned}$$

Setzen wir die Ableitungen in die obige Gleichung ein, so lautet die Bogenlänge

$$l = \int_0^T \sqrt{r^2\omega^2 + v^2} dt = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} + \frac{[z(T)]^2}{T^2}} T = \sqrt{4\pi^2 r^2 + [z(T)]^2}.$$

Mit den Werten der Aufgabenstellung ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras für die Bogenlänge ein Wert von

$$l = \sqrt{(4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2} = \sqrt{16 + 9} \text{ cm} = 5 \text{ cm},$$

den wir viermal nehmen müssen. Damit ist der Faden 20 cm lang. Man hätte das Ergebnis auch einfacher haben können, indem man den Zylinder mit dem aufgezeichneten Faden der Höhe nach aufschneidet und entrollt. Es handelt sich wohl um die naheliegende Lösung, welche die

Mathematikaufgabe 55

amerikanischen Studenten nicht herausfanden, weil man an das Einfachere zunächst nicht denkt.