

# Mathematikaufgabe 51

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß die Mischungsentropie durch darwinistische Selektion nicht ab-, sondern zunimmt und begründen Sie, warum Erbkrankheiten nicht immer aussterben, auch wenn die Betroffenen sich nicht fortpflanzen.

**Lösung:** Seien  $p_1$  und  $q_1$  die relativen Häufigkeiten zweier Allele ein und desselben Gens, die der Forderung  $p_1 + q_1 = 1$  genügen. Die totale Wahrscheinlichkeit, aus der sich die partikulären Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der verschiedenen Genotypen ergeben, ist nach Hardy und Weinberg gegeben durch

$$P^{(1)} = (p_1 + q_1)^2.$$

Substituieren wir  $p \equiv p_1$  und  $q \equiv q_1$  und zerlegen die Gesamtwahrscheinlichkeit durch Ausmultiplizieren in Teilwahrscheinlichkeiten, also

$$P^{(1)} = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2,$$

so erhalten wir mittels der Substitution  $p = 1 - q$  die drei Beiträge

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(1)} &= (1 - q)^2, \\ P_\beta^{(1)} &= q^2, \\ P_\gamma^{(1)} &= 2(1 - q)q, \end{aligned}$$

wobei  $P_\alpha^{(1)}$  die Wahrscheinlichkeit, daß zwei gesunde Allele aufeinandertreffen, angibt,  $P_\beta^{(1)}$  die Wahrscheinlichkeit für das Aufeinandertreffen zweier maligner Allele in homozygoter Form und  $P_\gamma^{(1)}$  die Wahrscheinlichkeit für das Aufeinandertreffen eines gesunden und eines malignen Allels in heterozygoter Form. Vermischen sich nun zwei Populationen derart, daß die Allele  $p_1$  und  $q_1$  nur in der ersten, die Allele  $p_2$  und  $q_2$  nur in der zweiten Population auftreten, so gilt für die Mittelwerte  $\bar{p}_1$  bzw.  $\bar{p}_2$  und  $\bar{q}_1$  bzw.  $\bar{q}_2$  der Mischpopulation die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(2)} &= (\bar{p}_1 + \bar{q}_1)^2 (\bar{p}_2 + \bar{q}_2)^2 \\ &= \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 + \bar{p}_2^2 \bar{q}_1^2 + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_1^2 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \\ &\quad + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1^2 + \bar{p}_1^2 \bar{q}_2^2 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2. \end{aligned}$$

Diese läßt sich wie oben in die drei Beiträge

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(2)} &= \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2, \\ \bar{P}_\beta^{(2)} &= \bar{p}_1^2 \bar{q}_2^2 + \bar{p}_2^2 \bar{q}_1^2 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1^2 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2, \\ \bar{P}_\gamma^{(2)} &= 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_1^2 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \end{aligned}$$

## Mathematikaufgabe 51

---

zerlegen, wobei  $P_\alpha^{(2)}$  für den reinerbigen Genotyp mit zwei nicht-malignen Allelen steht,  $P_\beta^{(2)}$  für die reinerbigen Genotypen mit mindestens einem bis maximal zwei malignen Allelen und  $P_\gamma^{(2)}$  für die mischerbigen Genotypen mit einem oder zwei malignen Allelen.

Seien nun  $N_1$  und  $N_2$  die absoluten Größen der Populationen 1 und 2 und  $N = N_1 + N_2$  die absolute Bevölkerungszahl der Mischpopulation. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine vollkommene Durchmischung an. Dann sind die Mittelwerte der relativen Häufigkeiten der malignen Allele in den beiden Populationen gegeben durch

$$\bar{q}_1 = \frac{N_1 q_1}{N_1 + N_2} = \frac{q_1}{2}, \quad \bar{q}_2 = \frac{N_2 q_2}{N_1 + N_2} = \frac{q_2}{2},$$

während sich die Mittelwerte der nicht-malignen Allele wie folgt ergeben:

$$\bar{p}_1 = \frac{N_1 p_1 + N_2}{N_1 + N_2} = \frac{p_1 + 1}{2}, \quad \bar{p}_2 = \frac{N_1 + N_2 p_2}{N_1 + N_2} = \frac{p_2 + 1}{2}.$$

Beide Populationen seien also vor ihrer Vermischung in bezug auf ihren jeweiligen Anteil an malignen Allelen gleichwertig, d.h. ihre jeweiligen Frequenzen  $p_i$  und  $q_i$  für  $i=1, 2$  müssen wegen  $p_i + q_i = 1$  gleich sein:

$$(q_1 = q_2 \equiv q) \wedge (p_1 = p_2 \equiv p) \Rightarrow \left( \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \frac{q}{2} \right) \wedge \left( \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \frac{p+1}{2} = 1 - \frac{q}{2} \right).$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den reinerbigen nicht-malignen sowie die reinerbigen malignen und mischerbigen Genotypen vereinfachen sich damit zu

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(2)} &= \bar{p}^4, \\ \bar{P}_\beta^{(2)} &= 2\bar{p}^2\bar{q}^2 + 4\bar{p}\bar{q}^3 + \bar{q}^4, \\ \bar{P}_\gamma^{(2)} &= 4\bar{p}^3\bar{q} + 4\bar{p}^2\bar{q}^2. \end{aligned}$$

Durch die obigen Transformationen können diese drei Teilbeträge rein rechnerisch in Abhängigkeit von nur einer Variablen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(2)} &= \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4, \\ \bar{P}_\beta^{(2)} &= 2\left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \left(\frac{q}{2}\right)^2 + 4\left(1 - \frac{q}{2}\right) \left(\frac{q}{2}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^4, \\ \bar{P}_\gamma^{(2)} &= 4\left(1 - \frac{q}{2}\right)^3 \left(\frac{q}{2}\right) + 4\left(1 - \frac{q}{2}\right)^2 \left(\frac{q}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Wenden wir das beschriebene Verfahren sinngemäß auf drei sich ideal vermischende Bevölkerungen an, wobei das jeweilige maligne Allel in nur jeweils einer Population vorkommt, so lautet die Gesamtwahrscheinlichkeit

## Mathematikaufgabe 51

---

$$\bar{P}^{(3)} = (\bar{p}_1 + \bar{q}_1)^2 (\bar{p}_2 + \bar{q}_2)^2 (\bar{p}_3 + \bar{q}_3)^2.$$

Multiplizieren wir dieses Produkt aus, so erhalten wir 27 verschiedene Terme:

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(3)} &= (\bar{p}_1 + \bar{q}_1)^2 (\bar{p}_2 + \bar{q}_2)^2 (\bar{p}_3 + \bar{q}_3)^2 \\ &= \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{q}_3^2 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \bar{q}_3^2 \\ &\quad + \bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + \bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{q}_3^2 + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_1^2 \bar{p}_3^2 + 4\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_1^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 2\bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_1^2 \bar{q}_3^2 \\ &\quad + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3^2 + 8\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{q}_3^2 + 2\bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3^2 + 4\bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 \\ &\quad + 2\bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{q}_3^2 + \bar{p}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{p}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + \bar{p}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 \\ &\quad + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2, \end{aligned}$$

die wir wie gewohnt zerlegen:

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(3)} &= \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2, \\ \bar{P}_\beta^{(3)} &= \bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2 + \bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 \bar{p}_1^2 + \bar{q}_3^2 \bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \\ &\quad + 2\bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 2\bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 + 2\bar{q}_3^2 \bar{p}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 + 2\bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 \bar{p}_1^2 + 2\bar{q}_3^2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \\ &\quad + 4\bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 4\bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 \bar{p}_1 \bar{q}_1 + 4\bar{q}_3^2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3^2 + \bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2 \bar{p}_1^2 + \bar{q}_3^2 \bar{q}_1^2 \bar{p}_2^2 \\ &\quad + 2\bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 2\bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2 \bar{p}_1 \bar{q}_1 + 2\bar{q}_3^2 \bar{q}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 + \bar{q}_1^2 \bar{q}_2^2 \bar{q}_3^2, \\ \bar{P}_\gamma^{(3)} &= 2\bar{p}_1^2 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 2\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3^2 + 2\bar{p}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3^2 \\ &\quad + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3^2 + 4\bar{p}_1^2 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 4\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2^2 \bar{p}_3 \bar{q}_3 + 8\bar{p}_1 \bar{q}_1 \bar{p}_2 \bar{q}_2 \bar{p}_3 \bar{q}_3. \end{aligned}$$

Für die Mittelwerte gelten sinngemäß geringere relative Häufigkeiten:

$$\bar{q}_1 = \frac{N_1 q_1}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{q_1}{3}, \quad \bar{q}_2 = \frac{N_2 q_2}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{q_2}{3}, \quad \bar{q}_3 = \frac{N_3 q_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{q_3}{3}$$

bzw.

$$\bar{p}_1 = \frac{N_1 p_1 + N_2 + N_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{p_1 + 2}{3}, \quad \bar{p}_2 = \frac{N_1 + N_2 p_2 + N_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{p_2 + 2}{3}, \quad \bar{p}_3 = \frac{p_3 + 2}{3},$$

die aber, wenn wir weder eine Population begünstigen noch benachteiligen, zu folgenden Mittelwerten führen:

$$(q_1 = q_2 = q_3 \equiv q) \wedge (p_1 = p_2 = p_3 \equiv p) \Rightarrow \left( \bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \bar{q}_3 = \frac{q}{3} \right) \wedge \left( \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 1 - \frac{q}{3} \right).$$

Setzen wir gleiche Mittelwerte in obiger Gleichung gleich, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \bar{P}_\alpha^{(3)} &= \bar{p}^6, \\ \bar{P}_\beta^{(3)} &= 3\bar{p}^4 \bar{q}^2 + 12\bar{p}^3 \bar{q}^3 + 15\bar{p}^2 \bar{q}^4 + 6\bar{p} \bar{q}^5 + \bar{q}^6, \\ \bar{P}_\gamma^{(3)} &= 6\bar{p}^5 \bar{q} + 12\bar{p}^4 \bar{q}^2 + 8\bar{p}^3 \bar{q}^3. \end{aligned}$$

## Mathematikaufgabe 51

---

Nur zu Rechenzwecken eliminieren wir die Größe  $\bar{p}$  derart, daß wir einen Ausdruck erhalten, der nur noch von  $q$  abhängt:

$$\begin{aligned}\bar{P}_\alpha^{(3)} &= \left(1 - \frac{q}{3}\right)^6, \\ \bar{P}_\beta^{(3)} &= 3\left(1 - \frac{q}{3}\right)^4 \left(\frac{q}{3}\right)^2 + 12\left(1 - \frac{q}{3}\right)^3 \left(\frac{q}{3}\right)^3 + 15\left(1 - \frac{q}{3}\right)^2 \left(\frac{q}{3}\right)^4 + 6\left(1 - \frac{q}{3}\right) \left(\frac{q}{3}\right)^5 + \left(\frac{q}{3}\right)^6, \\ \bar{P}_\gamma^{(3)} &= 6\left(1 - \frac{q}{3}\right)^5 \left(\frac{q}{3}\right) + 12\left(1 - \frac{q}{3}\right)^4 \left(\frac{q}{3}\right)^2 + 8\left(1 - \frac{q}{3}\right)^3 \left(\frac{q}{3}\right)^3.\end{aligned}$$

Allgemein könnten wir nun so fortfahren und beliebig viele Populationen unter gleichen Bedingungen miteinander vermischen, woraus sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit ableiten läßt, die sich wie folgt darstellt:

$$\bar{P}^{(n)} = (\bar{p}_1 + \bar{q}_1)^2 (\bar{p}_2 + \bar{q}_2)^2 \dots (\bar{p}_n + \bar{q}_n)^2.$$

Mit der Setzung

$$p \equiv p_1 = p_2 = \dots = p_n \equiv p \quad \text{und} \quad q_1 = q_2 = \dots = q_n \equiv q$$

folgt allgemein

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \dots = \bar{q}_n = \frac{q}{n} \quad \text{und} \quad \bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \dots = \bar{p}_n = \frac{p+n-1}{n} = 1 - \frac{q}{n}.$$

An den Näherungen der drei niedrigsten Binomialentwicklungen

$$\bar{P}_\alpha^{(1)} = (1-q)^2 \approx 1-2q, \quad \bar{P}_\alpha^{(2)} = \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 \approx 1-2q, \quad \bar{P}_\alpha^{(3)} = \left(1 - \frac{q}{3}\right)^6 \approx 1-2q$$

erkennen wir, daß sich für die  $n$ te Binomialentwicklung für kleine Werte von  $q$  die folgenden konstanten Ausdrücke ergeben:

$$\bar{P}_\alpha^{(n)} = \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{2n} \approx 1-2q, \quad \bar{P}_\gamma^{(n)} = 2n \left(1 - \frac{q}{n}\right)^{2n-1} \left(\frac{q}{n}\right) \approx 2q, \quad \bar{P}_\beta^{(n)} \approx 0.$$

Daran sieht man auch, daß eine beliebig große Vermischung bei niedrigen Frequenzen von  $q$  keinen greifbaren Vorteil mehr besitzt, weil die Homozygoten des malignen Allels aussterben, genauer gesagt nimmt die Wahrscheinlichkeit  $\bar{P}_\beta^{(n)}$ , daß sich zwei maligne Allele zu einem pathologischen Genotyp zusammenfinden, praktisch auf null ab. Die Wahrscheinlichkeit  $\bar{P}_\gamma^{(n)}$  für einen heterozygoten Überträger des malignen Allels pendelt sich hingegen auf einen stationären Wert von doppelter Allelfrequenz  $q$  ein, während die Wahrscheinlichkeit für einen unbelasteten Homozygoten dazu komplementär ist. Die Allelfrequenzen ändern sich also für kleine

## Mathematikaufgabe 51

$q$  kaum mehr, weil es keine Homozygoten mehr gibt, die das Allel  $q$  in seiner letalen Form zweimal besitzen und der Verlust eines Heterozygoten bewirkt, daß von jeder Allelsorte eines entfällt, was die Allelfrequenz als solche nicht signifikant ändert. Dieser Beweis geht wie folgt:

Seien  $p$  und  $q$  die beiden relativen Häufigkeiten vor einer Deselektion des Allels  $q$  und  $N_p$  bzw.  $N_q$  die zugehörigen absoluten Häufigkeiten, die addiert  $N$  ergeben. Dann sind absolute und relative Häufigkeit nach einem Ausscheiden von  $n$  Heterozygoten aufgrund der Selektion gegeben durch

$$p = \frac{N_p - n}{N - 2n} \quad \text{und} \quad q = \frac{N_q - n}{N - 2n}$$

Diese Größen sind für  $n \ll N_q$  annähernd konstant. Die Frequenz  $q$  bricht nur ein, wenn  $n$  in die Größenordnung von  $N_q$  kommt. Da die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung von Heterozygoten bei kleinen Frequenzen ebenfalls nicht sehr groß ist, würde der Rückgang der Allelfrequenz im Laufe vieler Generationen nur sehr langsam erfolgen, aber die Erbkrankheit würde nach endlicher Zeit immerhin aussterben. Beides zusammen liefert den Grund, warum Erbkrankheiten häufig nicht vollends aussterben, sondern mit einer niedrigen, aber dennoch deutlich von Null verschiedenen Frequenz erhalten bleiben. Die Entropie nimmt durch die darwinistische Selektion demnach keineswegs wieder auf den Wert ab, den sie vor der Mutation besaß, sondern sie stellt sich, wenn auch nur geringfügig, auf ein etwas höheres Niveau ein. Mit jeder neu hinzukommenden Mutation sprich Erbkrankheit nimmt die Entropie folglich noch weiter zu.

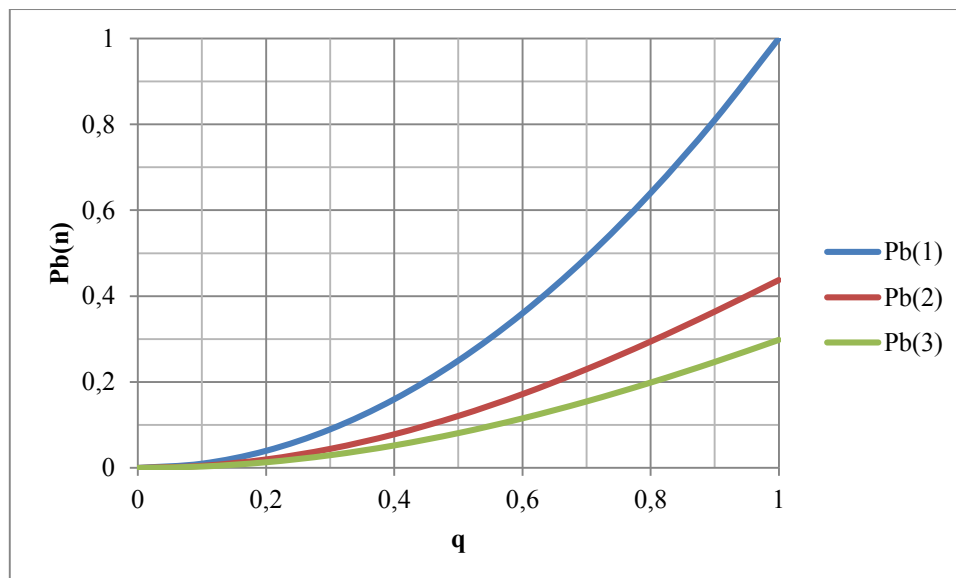


Abbildung 1. Wahrscheinlichkeit für eine nur homozygot auftretende Erbkrankheit

In Abb. 1 ist die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit, von einer Erbkrankheit betroffen zu sein, gegen die Frequenz des malignen Allels aufgetragen. Während diese Wahrscheinlichkeit für höhere Allelfrequenzen, also im Bereich der Inzucht, mit stärkerer Vermischung sehr stark

## Mathematikaufgabe 51

abnimmt, tut sich unterhalb von 10 % fast nichts mehr, weil diese Wahrscheinlichkeit in jeder noch so vermischten Population nahezu auf null absinkt.

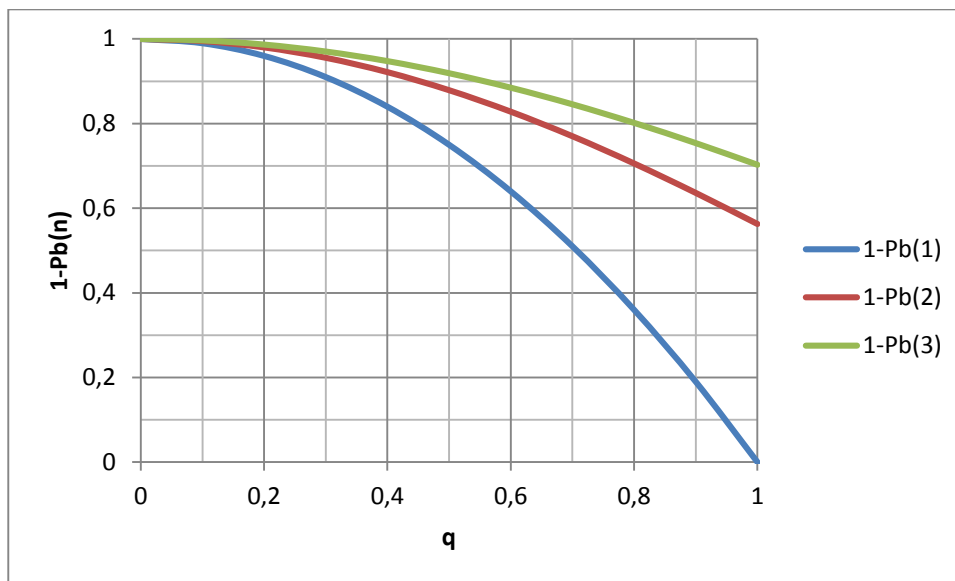


Abbildung 2. Wahrscheinlichkeit keine homozygote Erbkrankheit zu bekommen

Abb. 2 zeigt die inverse Wahrscheinlichkeit, nicht von einer Erbkrankheit betroffen zu sein. In einer Mischpopulation hat man demnach eine deutlich größere Chance, nicht zu erkranken, was aber eigentlich nur ein Umkehrschluß zu oben ist. Bei kleinen Allelfrequenzen fallen die Unterschiede nicht mehr gravierend ins Gewicht.

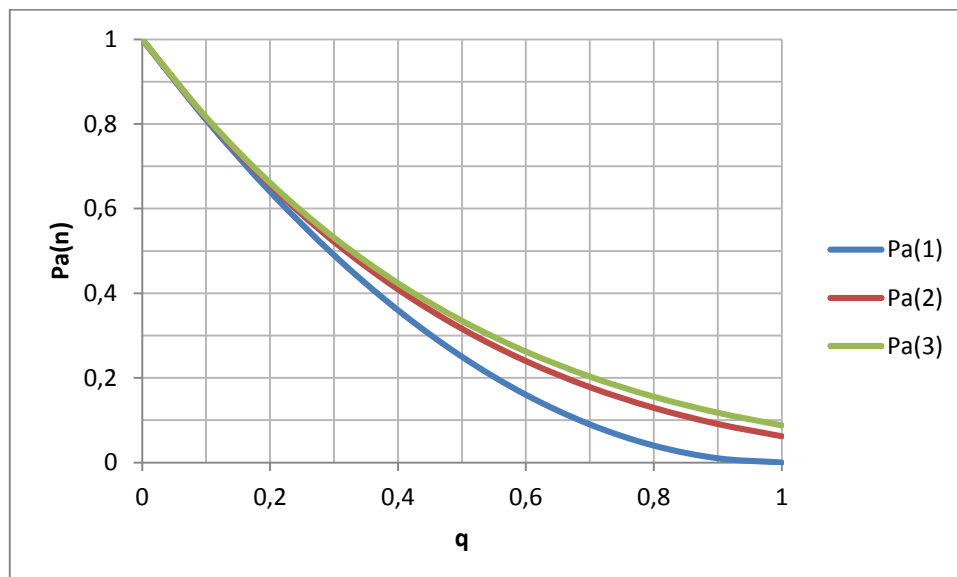


Abbildung 3. Wahrscheinlichkeit, nicht an einer dominant-rezessiven Erbkrankheit zu erkranken

Wenn also sowohl die homozygote als auch die heterozygote Form der Erbkrankheit klinisch auffällig sind, dann hat man nach Abb. 3 im dominant-rezessiven Erbgang für hohe Frequenzen in der Mischpopulation eine größere Wahrscheinlichkeit, gesund zu bleiben, als in einer unvermischten. Die Wahrscheinlichkeit, nicht zu erkranken, steigt, je mehr Homozygote sich nicht fortpflanzen, weil die Allelfrequenz des malignen Allels dabei sinkt.

## Mathematikaufgabe 51

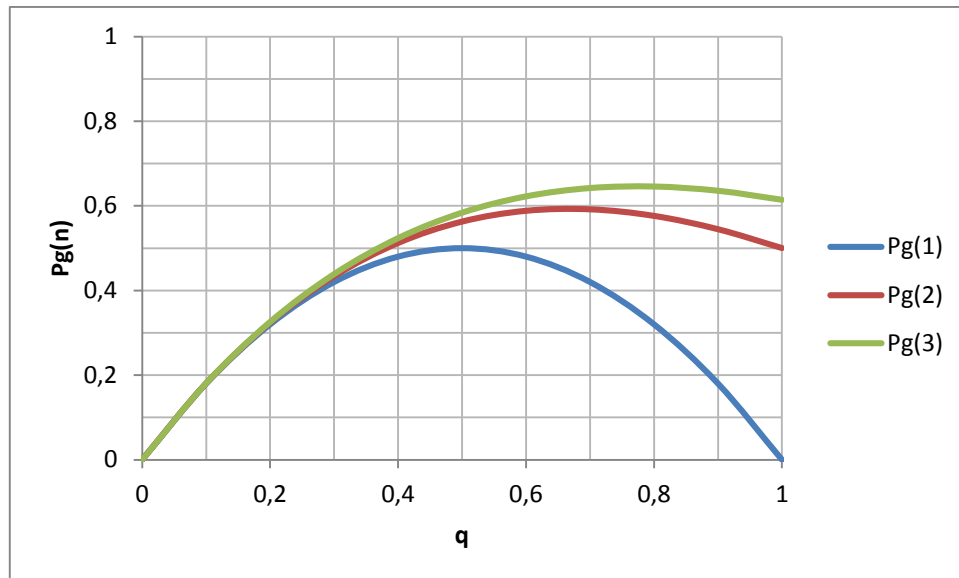


Abbildung 4. Wahrscheinlichkeit für die heterozygote Übertragung einer Erbkrankheit

Abb. 4 zeigt die Wahrscheinlichkeit, eine Erbkrankheit heterozygot zu übertragen. Sie besitzt im unvermischten Fall ein Maximum bei 0,5, bei zwei sich vermischenden Populationen ein Maximum bei  $2/3$  und bei drei sich vermischenden Völkern ein Maximum bei 0,75. Bei hohen Frequenzen des malignen Allels steigt bei vielen sich vermischenden Erbkrankheiten auch die Zahl der heterozygoten Überträger, unterhalb von 10 % Allelfrequenz verhalten sich gemischte Populationen dagegen unterschiedslos. Wie verhält es sich nun mit den Allelfrequenzen, wenn nur die heterozygote Form pathologisch ist?

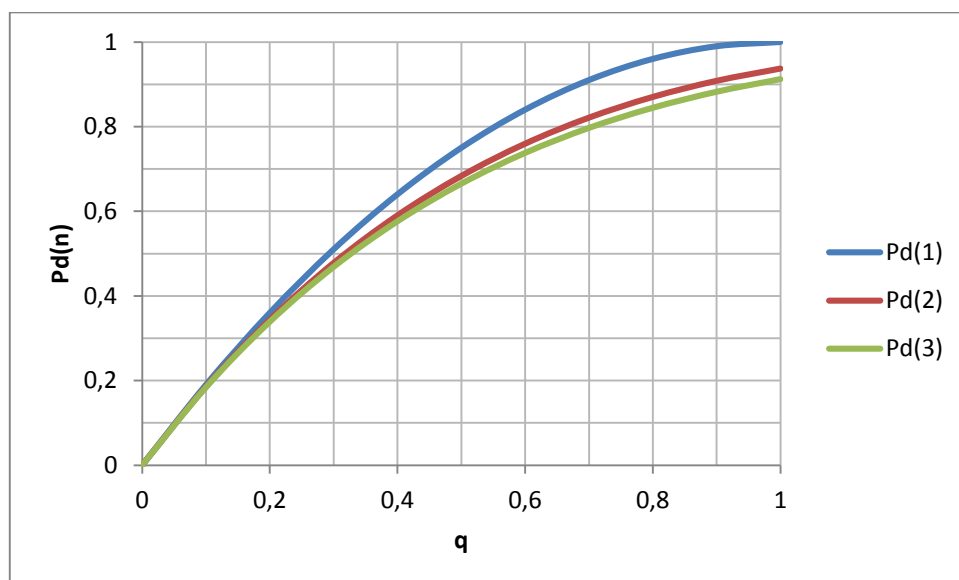


Abbildung 5. Wahrscheinlichkeit für eine dominant-rezessiv auftretende Erbkrankheit

Sind homozygoter und heterozygoter Phänotyp gleichermaßen pathologisch, so stirbt eine Erbkrankheit definitiv nach endlicher Zeit aus und es bleiben nur die Rezessiven übrig, denn die Frequenz des malignen Allels nimmt immer weiter ab und die Entropie geht damit gegen null. Gemäß Abb. 5 nimmt die Zahl der Erbkranken auch mit der Zahl der vermischten Gene ab. Da

## Mathematikaufgabe 51

---

dieser Form von Erbkrankheit ein schnelles Aussterben beschieden ist, kommt sie auch nur selten vor.

An diesen Beispielen sieht man auch, warum eine Erbkrankheit nicht ausstirbt, wenn sie nur in homozygoter Form wirksam ist. Denn durch die heterozygoten Überträger, die selbst keiner Selektion unterliegen, entstehen immer wieder neue Homozygoten, selbst wenn die Wahrscheinlichkeit dafür nur im Prozentbereich liegt. Man braucht also nicht eigens zu epigenetischen Erklärungsversuchen greifen, weil die Genetik selbst das Phänomen der Erbkrankheiten ausreichend erklärt.